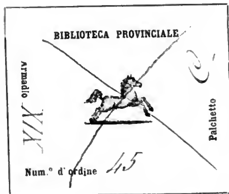
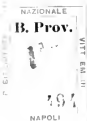



FONDO PIZZOFALCONE




BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio XIX
Palchetto
Num.° d'ordine 45




NAZIONALE
B. Prov.
VITT. EM. III
494
NAPOLI

# INTRODUCTIO
## IN ANALYSIN
## INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

*Professore Regio* BEROLINENSI, *& Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

EDITIO NOVA.

TOMUS SECUNDUS.








*LUGDUNI,*
Apud BERNUSET, DELAMOLLIERE, FALQUE & Soc.

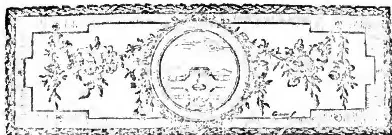
1797.



# INTRODUCTIO
## IN
# ANALYSIN INFINITORUM.
## LIBER SECUNDUS,

*CONTINENS*

Theoriam Linearum curvarum, una cum appendice de Superficiebus.



# LIBER SECUNDUS.

## CAPUT PRIMUM.

### DE LINEIS CURVIS IN GENERE.



1. QUONIAM quantitas variabilis eſt magnitudo in genere conſiderata omnes quantitates determinatas in ſe complectens, in Geometria hujuſmodi quantitas variabilis convenientiſſime repræſentabitur per lineam rectam indefinitam $RS$. Cum enim in linea indefinita magnitudinem quamcunque determinatam abſcindere liceat, ea pariter ac quantitas variabilis eandem quantitatis ideam menti offert. Primum igitur, in linea indefinita $RS$ punctum aſſumi debet $A$, unde magnitudines determinatæ abſcindendæ initium ſumere cenſeantur; ſicque portio determinata $AP$ repræſentabit valorem determinatum in quantitate variabili comprehenſum. TAB. I. Fig. 1.

2. Sit igitur $x$ quantitas variabilis, quæ per rectam inde-

LIB. II. finitam $RS$ repræſentetur, atque manifeſtum eſt omnes valores determinatos ipſius $x$, qui quidem ſint reales, per portiones in recta $RS$ abſcindendas repræſentari poſſe. Silicet, ſi punctum $P$ in ipſo puncto $A$ capiatur, intervallum $AP$ evaneſcens exhibebit valorem $x = 0$; quo magis autem punctum $P$ ab $A$ removetur, eo major valor determinatus ipſius $x$ intervallo $AP$ repræſentabitur.

Vocantur autem hæc intervalla $AP$, ABSCISSÆ.

Atque ideo Abſciſſæ exhibent variabilis $x$ valores determinatos.

3. Quia vero recta $RS$ indefinita utrinque ab $A$ in infinitum excurrit, utrinque etiam omnes ipſius $x$ valores abſcindi poterunt. Quod ſi autem valores affirmativos ipſius $x$ ab $A$ dextrorſum progrediendo abſcindamus, intervalla $Ap$ ſiniſtrorſum abſciſſa valores ipſius $x$ negativos exhibebunt. Cum enim, quo longius punctum $P$ dextrorſum ab $A$ diſtat, intervallum $AP$ eo majorem valorem ipſius $x$ ſignificet; ſic viciſſim, quo magis punctum $P$ ſiniſtrorſum removetur, eo magis valor ipſius $x$ diminuetur; atque, ſi $P$ ad $A$ perveniat, omnino fiet $x = 0$. Hanc ob rem ſi $P$ ulterius ſiniſtrorſum removeatur, valores ipſius $x$ nihilo minores, hoc eſt negativi, denotabuntur, atque ideo intervalla $Ap$ ab $A$ ſiniſtrorſum abſciſſa valores ipſius $x$ negativos exhibebunt, ſi quidem intervalla $AP$ dextrorſum ſumta valores affirmativos præbere ſenſeantur. Arbitrarium autem eſt utra plaga ad valores affirmativos ipſius $x$ deſignandos eligatur: ſemper enim oppoſita valores ipſius $x$ negativos continebit.

TAB. I. Fig. 2. 4. Cum igitur linea recta indefinita quantitatem variabilem $x$ exhibeat, videamus quomodo Functio ipſius $x$ quæcunque quam commodiſſime geometrice repræſentari queat. Sit $y$ Functio quæcunque ipſius $x$; quæ ergo valorem deteminatum induat, ſi pro $x$ valor determinatus ſubſtituatur. Sumta recta indefinita $RAS$ ad valores ipſius $x$ denotandos, cuilibet valori ipſius $x$ determinato $AP$ normaliter applicetur recta $PM$ valori ipſius $y$ reſpondenti æqualis. Scilicet, ſi

valor ipſius $y$ prodeat affirmativus, is ſupra rectam $RS$ conſtituatur, ſin autem valor ipſius $y$ negativus oriatur, is infra rectam $RS$ normaliter applicetur. Sumtis enim valoribus ipſius $y$ affirmativis ſupra rectam $RS$, evaneſcentes in ipſam $RS$ & negativi infra eam cadent. 

5. Figura ergo ejuſmodi Functionem ipſius $x$, pro $y$ exhibet, quæ, poſito $x = 0$, induat valorem affirmativum $= AB$, ſin capiatur $x = AP$, fit $y = PM$; ſi $x = AD$, fit $y = 0$, &, ſi ſumatur $x = AP$, Functio $y$ accipit valorem negativum, ideoque normaliter applicata $PM$ infra rectam $RS$ cadit. Simili modo valores ipſius $y$, qui valoribus negativis ipſius $x$ reſpondent, repræſentantur per applicatas ſupra $RS$ poſitas, ſi ſint affirmativi; contra autem infra rectam $RS$ conſtitui debent, ut $pm$: ſin autem, pro quopiam ipſius $x$ valore, ut $-x = AE$, fiat $y = 0$, tum ibi longitudo Applicatæ evaneſcit.

6. Si igitur hoc modo pro omnibus valoribus determinatis ipſius $x$ definiantur valores ipſius $y$ reſpondentes, ad ſingula rectæ $RS$ puncta $P$ conſtituentur rectæ normaliter applicatæ $PM$ valores Functionis $y$ exprimentes, harumque Applicatarum $PM$ alteri termini $P$ in rectam $RS$ incident, alteri vero $M$ vel ſupra $RS$ erunt poſiti, ſi valores ipſius $y$ fuerint affirmativi; vel infra, ſi ſint negativi; vel etiam in ipſam rectam $RS$ incident, ſi evaneſcant, uti evenit in punctis $D$ & $E$. Singulæ ergo Applicatarum extremitates $M$ repræſentabunt lineam quampiam, ſive rectam, ſive curvam; quæ igitur hoc modo per Functionem $y$ determinabitur. Quare, quælibet ipſius $x$ Functio, hoc modo ad Geometriam tranſlata, certam determinabit lineam, ſive rectam ſive curvam, cujus natura a natura Functionis $y$ pendebit.

7. Hoc autem modo linea curva, quæ ex Functione $y$ reſultat, perfecte cognoſcitur; quoniam omnia ejus puncta ex Functione $y$ determinantur; in ſingulis enim punctis $P$ conſtat longitudo Applicatæ normalis $PM$, cujus extremum punctum $M$ in linea curva ſit poſitum, ſicque omnia lineæ curvæ puncta inveniuntur. Quomodocunque autem linea curva fuerit com-

 parata, ex ejus singulis punctis rectæ normales ad rectam $RS$ duci possunt, sicque obtinentur intervalla $AP$, quæ valores variabilis $x$ exhibent, & longitudines Applicatarum $PM$, quæ valores Functionis $y$ repræsentant. Hinc nullum curvæ extabit punctum, quod non hac ratione per Functionem $y$ definiatur.

8. Quanquam complures lineæ curvæ per motum puncti continuum mechanice describi possunt, quo pacto tota linea curva simul oculis offertur, tamen hanc linearum curvarum ex Functionibus originem hic potissimum contemplabimur, tanquam magis analyticam latiusque patentem, atque ad calculum magis accommodatam. Quælibet ergo Functio ipsius $x$ suppeditabit lineam quandam, sive rectam sive curvam, unde vicissim lineas curvas ad Functiones revocare licebit. Cujusque ergo lineæ curvæ natura exprimetur per ejusmodi Functionem ipsius $x$, quæ, dum intervalla $AP$ ad quæ perpendicula $MP$ ex singulis curvæ punctis $M$ in rectam $RS$ demittuntur, per variabilem $x$ indicantur, exhibeat semper veram istius Applicatæ $MP$ longitudinem.

9. Ex hac linearum curvarum idea statim sequitur earum divisio in *continuas* & *discontinuas* seu *mixtas*. Linea scilicet curva *continua* ita est comparata, ut ejus natura per unam ipsius $x$ Functionem definitam exprimatur. Quod si autem linea curva ita sit comparata, ut variæ ejus portiones $BM$, $MD$, $DM$ &c., per varias ipsius $x$ Functiones exprimantur; ita ut, postquam ex una Functione portio $BM$ fuerit definita, tum ex alia Functione portio $MD$ describatur; hujusmodi lineas curvas *discontinuas* seu *mixtas* & *irregulares* appellamus: propterea quod non secundum unam legem constantem formantur, atque ex portionibus variarum curvarum continuarum componuntur.

10. De curvis autem continuis in Geometria potissimum est sermo, atque infra ostendetur, quæ curvæ motu uniformi secundum regulam quandam constantem mechanice describuntur, easdem quoque per unicam Functionem exprimi, atque ideo

esse continuas. Sit igitur $mEBMDM$ linea curva continua, cujus naturam contineat Functio quæpiam ipsius $x$, quæ sit $y$; atque manifestum est, sumtis valoribus ipsius $x$ determinatis in recta $RS$, a puncto fixo $A$, tum valores ipsius $y$ respondentes præbere Applicatarum normalium $PM$ longitudinem. CAP. I.

11. In hac linearum curvarum explicatione nomina quædam sunt tenenda, quorum frequentissimus usus existit in doctrina de Lineis curvis.

Primum igitur recta $RS$, in qua valores ipsius $x$ abscinduntur, vocatur AXIS, seu linea recta *directrix*.

Punctum $A$, a quo valores ipsius $x$ mensurantur, dicitur *initium Abscissarum*.

Portiones autem Axis $AP$, quibus determinati ipsius $x$ valores indicantur, vocari solent ABSCISSÆ.

Et perpendiculares $PM$, ex terminis *Abscissarum* $M$ ad lineam curvam pertingentes, nomen APPLICATARUM obtinuerunt.

Vocantur autem hoc casu Applicatæ *normales* seu *orthogonales*, quia cum Axe angulum rectum constituunt; cum enim simili modo Applicatæ $PM$ ad angulum obliquum cum Axe constitui possint, hoc casu Applicatæ *obliquangulæ* vocantur; hic vero constanter naturam curvarum per Applicatas orthogonales explicabimus, nisi expressis verbis contrarium indicetur.

12. Si igitur Abscissa quæcunque $AP$ insigniatur per variabilem $x$, ut sit $AP = x$, tum Functio $y$ indicabit magnitudinem Applicatæ $PM$, eritque $PM = y$. Natura igitur lineæ curvæ, si quidem fuerit continua, exprimetur per qualitatem Functionis $y$, seu per rationem, qua $y$ ex $x$ & quantitatibus constantibus componitur. In Axe igitur $RS$ erit portio $AS$ locus Abscissarum affirmativarum; portio $AR$ locus Abscissarum negativarum; tum vero supra Axem $RS$ existet regio Applicatarum affirmativarum, infra autem erit regio Applicatarum negativarum.

13. Cum igitur ex qualibet Functione ipsius $x$ nascatur linea curva continua, hæc etiam ex illa Functione cognosci

 atque describi poterit. Tribuantur enim primo ipsi $x$ valores affirmativi a o ad $\infty$ usque progrediendo, ac pro singulis quærantur valores Functionis $y$ respondentes, quæ per Applicatas, sive sursum sive deorsum porrectas, repræsententur, prout valores habeant sive affirmativos sive negativos; sicque orietur portio curvæ $BMM$. Deinde simili modo ipsi $x$ tribuantur omnes valores negativi ab o ad $-\infty$ progrediendo, & valores ipsius $y$ respondentes determinabunt curvæ portionem $BEm$, sicque universa linea curva in Functione contenta exhibebitur.

14. Quia est $y$ Functio ipsius $x$; vel $y$ æquabitur Functioni ipsius $x$ explicitæ, vel dabitur æquatio inter $x$ & $y$, qua $y$ per $x$ definitur: utroque casu habebitur æquatio, quæ dicitur naturam curvæ exprimere. Hanc ob rem natura cujusque lineæ curvæ per æquationem inter duas variabiles $x$ & $y$ exhibetur; quarum altera $x$ denotet Abscissas in Axe a dato principio $A$ sumtas; altera vero $y$ Applicatas ad Axem normales. Abscissæ autem & Applicatæ conjunctim consideratæ appellantur COORDINATÆ *orthogonales*: hincque natura lineæ curvæ per æquationem inter Coordinatas orthogonales definiri dicitur, si habeatur æquatio determinans, qualis Functio ipsius $x$ sit $y$.

15. Cum igitur linearum curvarum cognitio ad Functiones perducatur, tot varia linearum curvarum existent genera, quot supra Functionum esse vidimus. Ad modum ergo Functionum lineæ curvæ aptissime dividuntur in *algebraïcas* & *transcendentes*. Linea curva scilicet erit algebraïca, si Applicata $y$ fuerit Functio algebraïca ipsius Abscissæ $x$; seu, cum natura lineæ curvæ exprimitur per æquationem algebraïcam inter Coordinatas $x$ & $y$, hujus generis lineæ curvæ quoque *geometricæ* vocari solent. Linea curva autem *transcendens* est, cujus natura exprimitur per æquationem transcendentem inter $x$ & $y$; seu, ex qua fit $y$ Functio transcendens ipsius $x$. Hæcque est præcipua linearum curvarum continuarum divisio, qua eæ sunt vel *algebraïcæ* vel *transcendentes*.

16. Ad lineam autem curvam ex data Functione ipsius $x$, qua Applicata $y$ exprimitur describendam, natura Functionis, an

an sit uniformis, an multiformis probe est attendenda. Ponamus primo $y$ esse Functionem uniformem ipsius $x$, seu esse $y = P$, denotante $P$ Functionem quamcunque uniformem ipsius $x$; & quia ipsi $x$ valorem quemvis determinatum tribuendo, Applicata $y$ unum quoque valorem determinatum recipit, unicuique Abscissæ una respondebit Applicata & hanc ob rem Curva ita erit comparata, ut, si in quovis Axis $RS$ puncto $P$ ducatur ad ipsum normalis $PM$, ea semper Curvam secet, idque in unico puncto $M$. Singulis ergo Axis punctis singula respondebunt Curvæ puncta; &, cum Axis utrinque in infinitum extendatur, Curva quoque utrinque in infinitum excurret. Seu Curva ex tali Functione orta continuo tractu utrinque cum Axe in infinitum porrigetur, cujusmodi tractum figura 2 exhibet, ubi linea curva $mEBMDM$ utrinque sine ulla interruptione in infinitum excurrit.

17. Sit $y$ Functio biformis ipsius $x$, seu denotantibus litteris $P$ & $Q$ Functiones ipsius $x$ uniformes, sit $yy = 2Py - Q$ ut sit $y = P \pm \surd(PP - Q)$. Unicuique igitur Abscissæ $x$ respondebit duplex Applicata $y$, utraque existente vel reali vel imaginaria · prius si $PP > Q$, posterius si $PP < Q$. Quamdiu ergo uterque valor ipsius $y$ erit realis, Abscissæ $AP$ duplex conveniet Applicata $PM$, $PM$, seu recta ad Axem in $P$ normalis Curvam in duobus punctis $M$ & $M$ trajiciet. Ubi autem fit $PP < Q$, ibi Abscissæ nulla convenit Applicata; seu normalis ad Axem his in locis Curvæ nusquam occurret, ut fit in $p$. At cum ante esset $PP > Q$, fieri non poterit $PP < Q$, nisi transeundo per casum $PP = Q$, qui erit limes inter Applicatas reales & imaginarias. Ubi ergo Applicatæ reales desinunt, uti in $C$ vel $G$, ibi fit $y = P \pm 0$, seu ambæ Applicatæ inter se fiunt æquales, ibique Curva cursum inflectendo regredietur. TAB. I. Fig. 3.

18. Secundum Figuram apparet, dum Abscissa negativa $-x$ contineatur intra limites $AC$ & $AE$, Applicatam $y$ fieri imaginariam, esseque $PP < Q$: ultra $E$ vero sinistrorsum progrediendo Applicatæ iterum fiunt reales, quod fieri nequit nisi

Lib. II. in $E$ fit $PP = Q$, ideoque ambæ Applicatæ conveniant. Tum rursus Abscissis $AP$ duplex Applicata $Pm$, $Pm$ respondet, donec ad $G$ perveniatur, ubi hæ duæ Applicatæ conveniunt, atque ultra $G$ denuo fiunt imaginariæ. Hujusmodi ergo linea curva constare poterit ex partibus a se invicem disjunctis ut $MBDBM$ & $Fm\,Hm$ duabus pluribusve: nihilo vero minus hæ partes conjunctim consideratæ unam Curvam continuam seu regularem constituere sunt censendæ, quia hæ singulæ partes ex una eademque Functione nascuntur. Istæ ergo Curvæ hanc habent proprietatem, ut, si in singulis Axis punctis normaliter producantur rectæ $MM$, eæ semper Curvam vel nusquam vel in duobus punctis trajiciant; nisi forte duo intersectionis puncta in unum coalescant, quod fit si Applicatæ per puncta $D$, $F$, $H$, vel $I$ ducantur.

19. Si $y$ fuerit Functio triformis ipsius $x$, seu si $y$ per hujusmodi æquationem $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$ definiatur, existentibus $P$, $Q$ & $R$ Functionibus uniformibus ipsius $x$, tum pro quovis valore ipsius $x$ Applicata $y$ tres habebit valores, qui, vel omnes erunt reales, vel unicus tantum, reliquis duobus existentibus imaginariis. Hinc omnes Applicatæ Curvam secabunt, vel in tribus punctis, vel tantum in unico, nisi ubi duo vel etiam tria intersectionis puncta in unum coalescunt. Cum igitur unicuique Abscissæ saltem una Applicata realis conveniat, necesse est ut Curva utrinque cum Axe in infinitum excurrat. Curva ergo vel uno continuo tractu constabit, ut in *Figura quarta*; vel duabus partibus a se junctis, ut in *Figura quinta*; vel pluribus, quæ tamen omnes conjunctæ unam eandemque Curvam continuam constituunt.

Tab. I. Fig. 4. & 5.

20. Si $y$ fuerit Functio quadriformis ipsius $x$, seu si $y$ per hujusmodi æquationem $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$ definiatur, tum unicuique valori ipsius $x$, vel quatuor respondebunt valores reales ipsius $y$, vel duo tantum, vel omnino nullus. Hinc, in Curva ex hujusmodi Functione quadriformi orta singulæ Applicatæ Curvam secabunt vel in quatuor punctis,

vel in duobus tantum, vel nusquam, quos singulos casus *Figura Sexta* exhibet; notari autem debent loca $I$ & $o$, ubi duo intersectionis puncta in unum coalescunt. Hanc ob rem tam dextrorsum quam sinistrorsum vel nulli Curvæ rami in infinitum excurrunt, vel duo vel etiam quatuor. Priori casu, quo ex neutra parte nulli rami in infinitum extenduntur, Curva undique erit clausa, ut figura indicat, spatiumque definitum includit. Hinc ergo jam concludi potest indoles linearum curvarum, quæ formantur ex Functionibus multiformibus quotcunque significatuum.

21. Si scilicet fuerit $y$ Functio multiformis, seu determinetur per æquationem, in qua $n$ sit exponens maximæ potestatis ipsius $y$, tum numerus valorum realium ipsius $y$ erit vel $n$, vel $n - 2$, vel $n - 4$, vel $n - 6$, &c., in totidem ergo punctis quælibet Applicata Curvam intersecabit. Ita, si una Applicata Curvam continuam secet in $m$ punctis, omnes aliæ Applicatæ Curvam secabunt in tot punctis, quorum numerus semper numero pari differat ab $m$; nusquam ergo Curva ab Applicata secari poterit in $m + 1$, vel $m - 1$, vel $m \pm 3$ &c., punctis. Hoc est, si numerus intersectionum unius Applicatæ fuerit par vel impar, omnes quoque Applicatæ reliquæ Curvam secabunt in punctorum numero vel pari vel impari.

22. Si igitur una Applicata Curvam secet in punctorum numero impari, tum fieri nequit, ut ulla alia Applicata Curvam nusquam intersecet: Curva ergo utrinque ad minimum unum habebit ramum in infinitum excurrentem, &, si ex alterutra parte plures rami in infinitum extendantur, eorum numerus debet esse impar, quia numerus intersectionum unius cujusque Applicatæ non potest esse par; si ergo rami utrinque in infinitum excurrentes simul numerentur, eorum numerus constanter erit par. Hoc idem locum habet si Applicatæ Curvam intersecent in punctorum numero pari, tum enim ex utraque parte seorsim vel nullus, vel duo, vel quatuor &c., rami in infinitum excurrent, unde ergo quoque omnium ramorum in in-

 finitum excurrentium numerus erit par. Jam igitur adepti ſumus aliquot inſignes proprietates Curvarum continuarum & regularium, unde eas a Curvis diſcontinuis & irregularibus diſcernere licet.

---

## CAPUT II.

### *De Coordinatarum permutatione.*

TAB. I. *Fig. 2.*

23. QUEMADMODUM ex æquatione inter Coordinatas $x$ & $y$, quarum illa Abſciſſam, hæc Applicatam denotat; data Curva deſcribitur ſuper Axe $RS$, initio Abſciſſarum $A$ alicubi pro lubitu aſſunto, ita viciſſim, ſi jam deſcripta fuerit linea curva ejus natura exprimi poterit per æquationem inter Coordinatas. Hic autem quamvis Curva ſit data, duæ tamen res in arbitrio noſtro relinquuntur; poſitio ſcilicet Axis $RS$, & principium Abſciſſarum $A$. Quæ cum infinitis modis variari queant, etiam pro eadem linea Curva innumerabiles æquationes exhiberi poterunt, hancque ob cauſam ex æquationum diverſitate non ſemper ad diverſitatem linearum curvarum, quæ illis æquationibus exprimantur concludere licet, etiamſi diverſæ Curvæ perpetuo diverſas præbeant æquationes.

24. Cum igitur, variato tam Axe quam Abſciſſarum initio, innumerabiles oriantur æquationes ejuſdem Curvæ naturam exprimentes, hæ omnes ita inter ſe erunt comparatæ, ut ex data æquatione una reliquæ omnes inveniri queant. Ex data enim æquatione inter Coordinatas ipſa linea curva determinatur, hac autem cognita, ſi quæcunque linea recta pro Axe, & in ea punctum pro Abſciſſarum principio aſſumatur, æquatio inter Coordinatas orthogonales definietur. Hoc igitur Capite methodum trademus, cujus ope, ſi æquatio pro Curva fuerit data, ad alium Axem quemcunque, & Abſciſſarum initium quodcunque æquatio inter Coordinatas inveniri queat, quæ ejuſdem Curvæ naturam exprimat. Atque hoc modo reperientur

omnes omnino æquationes, quæ ejusdem Curvæ naturam comprehendant, sicque facilius diversitas linearum curvarum ex æquationum diversitate dijudicari poterit. CAP. II.

25. Sit igitur data æquatio quæcunque inter $x$ & $y$, ex qua sumta recta $RS$ pro Axe, & puncto $A$ pro initio Abscissarum, ita ut $x$ denotet Abscissam $AP$ & $y$ Applicatam $PM$, producatur linea curva $CBM$, cujus ergo natura per æquationem datam exprimitur. Retineamus jam primum eumdem Axem $RS$, at aliud punctum in eo $D$ pro initio Abscissarum assumamus, ita ut nunc puncto curvæ $M$ respondeat Abscissa $DP$, quæ ponatur $= t$, Applicata vero $MP$ manebit eadem $= y$, quæ ante: quæramus igitur æquationum inter $t$ & $y$, qua ejusdem Curvæ $CBM$ natura exprimatur. Ponatur intervallum $AD = f$, quod ab $A$ sinistrorsum in regionem Abscissarum negativarum cadat, eritque $DP = t = f + x$, ideoque $x = t - f$. Quare si in æquatione inter $x$ & $y$ data ubique loco $x$ substituatur $t - f$, prodibit æquatio inter $t$ & $y$, quæ eamdem lineam curvam $CBM$ exhibebit. Cum igitur magnitudo $AD = f$ ab arbitrio nostro pendeat, jam innumerabiles diversas adepti sumus æquationes, quæ omnes eandem lineam curvam exprimant. TAB. II. Fig. 7.

26. Si Curva alicubi Axem $RS$ trajiciat, uti in $C$, tum sumto hoc puncto $C$ pro initio Abscissarum, ejusmodi obtinebitur æquatio, quæ, posita Abscissa $CP = 0$, simul Applicatam $PM$ evanescentem sit præbitura; siquidem unica tantum Applicata puncto Axis $C$ respondeat. Intersectio autem $C$, si ulla pluresve dentur, invenietur ex æquatione primum proposita inter $x$ & $y$, ponendo $y = 0$, & ex æquatione quærendo valorem vel valores ipsius $x$. Ubi enim Curva in Axem incidit, ibi fit $y = 0$, facto ergo vicissim $y = 0$, omnes illæ Abscissæ seu valores ipsius $x$ elicientur, ubi Curva in Axem incidit.

27. Initium ergo Abscissarum, retento Axe, mutabitur si Abscissa $x$ data quantitate sive augeatur sive minuatur; hoc est, si loco $x$ ponatur $t - f$ ubi $f$ erit quantitas affirmativa, si

 novum Abſciſſarum initium $D$ ſiniſtrorſum ab $A$ fuerit remotum; erit vero $f$ quantitas negativa, ſi punctum $D$ ad dextram ab $A$ fuerit ſitum.

Tab. II. Fig. 8. Ponamus nunc deſcripta Curva $LBM$ ex data æquatione inter $AP = x$ & $PM = y$, alium aſſumi Axem $rs$ priori parallelum in eoque punctum $D$ pro Abſciſſarum initio: cadat autem iſte Axis in regionem Applicatarum negativarum, ſitque ejus a priori Axe diſtantia $AF = g$, atque ponatur intervallum $DF = AG = f$. Sit igitur in hoc novo Axe Abſciſſa puncto Curvæ $M$ reſpondens, $DQ = t$, & Applicata $QM = u$, eritque $t = DF + FQ = f + x$ & $u = PM + PQ = g + y$, unde fit $x = t - f$ & $y = u - g$. Quare ſi in æquatione inter $x$ & $y$ data ſubſtituatur ubique $t - f$ loco $x$, & $u - g$ loco $y$, orietur æquatio inter $t$ & $u$, qua ejuſdem lineæ curvæ natura exprimetur.

28. Cum igitur magnitudines $f$ & $g$ ab arbitrio noſtro pendeant, hincque infinitis modis definiri queant, infinities plures diverſæ formari poterunt æquationes quam priori caſu, quæ tamen omnes ad eamdem lineam curvam pertineant. Quod ſi ergo duæ æquationes altera inter $x$ & $y$, & altera inter $t$ & $u$, hoc tantum a ſe invicem diſcrepent, ut altera in alteram transformetur, ſi Coordinatæ unius datis quantitatibus ſive augeantur ſive minuantur, tum ambæ æquationes licet diverſæ tamen eamdem lineam curvam exhibebunt. Hinc igitur facile innumerabiles formabuntur æquationes diverſæ, quæ tamen omnes ejuſdem lineæ curvæ naturam exprimant.

29. Statuatur novus Axis $rs$ normalis ad priorem $RS$, ſecanſque ipſum in principio Abſciſſarum $A$, ita ut pro utroque Tab. II. Fig. 9. Axe idem ſit Abſciſſarum initium $A$. Quoniam pro Axe $RS$ datur æquatio ad Curvam $LM$ inter Abſciſſam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$, ducatur ex Curvæ puncto $M$ in novum Axem $rs$ perpendicularis $MQ$ & vocetur Abſciſſa nova $AQ = t$, Applicata nova $QM = u$, eritque ob $APMQ$ parallelogrammum rectangulum, $t = y$ & $u = x$. Hinc, ex æquatione inter $x$ & $y$ data, formabitur æquatio inter $t$ & $u$,

ponendo $u$ loco $x$ & $t$ loco $y$. Prior ergo Abſciſſa $x$ nunc abit in Applicatam $QM = u$, & prior Applicata $y$ nunc abit in Abſciſſam $AQ = t$; pro iſto itaque novo Axe nulla alia æquationi variatio inducitur niſi, quod Coordinatæ $x$ & $y$ inter ſe commutentur: hancque ob rationem Abſciſſa & Applicata ſimul Coordinatæ vocari ſolent, nullo facto diſcrimine, utra pro Abſciſſa Applicatave accipiatur. Propoſita enim æquatione inter duas Coordinatas $x$ & $y$, eadem Curva emergit, ſive $x$ ſive $y$ ad Abſciſſam indicandam accipiatur.

30. Poſuimus hic novi Axis $rs$ portionem $As$ exhibere Abſciſſas affirmativas, atque ad dextram Axis $rs$ ſtatui regionem Applicatarum affirmativarum, quæ cum ab arbitrio pendeant, pro lubitu immutari poterunt. Scilicet ſi Axis portio $Ar$ Abſciſſis affirmativis deſtinetur, erit utique $AQ = -t$, ſicque in æquatione inter $x$ & $y$ loco $y$ poni debet $-t$. Deinde ſi ad dextram Axis $rs$ regio Applicatarum negativarum ſtatuatur, fiet $QM = -u$, atque pro $x$ ſcribi debebit $-u$. Atque hinc intelligitur naturam lineæ curvæ non mutari etiamſi in æquatione inter Coordinatas vel alterutra vel utraque negativa ſtatuatur; id quod in omnibus æquationis transmutationibus eſt tenendum.

31. Secet nunc novus Axis $rs$ priorem $RS$ ſub angulo quocunque $SAs$; ſitque interſectio in ipſo Abſciſſarum initio $A$, quod punctum in utroque Axe initium Abſciſſarum conſtituat. Data ergo ſit pro Axe $RS$ æquatio quæcunque pro Curva $LM$ inter Abſciſſam $AP = x$ & Applicatam $PM = y$, ex qua reperiri debeat æquatio ad eamdem Curvam pro novo Axe $rs$, ſeu ex Curvæ puncto $M$ ad novum Axem demiſſo perpendiculo $MQ$, inter Abſciſſam novam $AQ = t$, & Applicatam $MQ = u$. Sit angulus $SAs = q$; ejus Sinus $= m$, & Coſinus $= n$, ſumta unitate pro Sinu toto ut ſit $mm + nn = 1$. Ex $P$ ducantur normales $Pp$ & $Pq$ in novas Coordinatas, eritque ob $Ap = x$, $Pp = x.\,ſin.\,q$; $Ap = x.\,coſ.\,q$, deinde quia angulus $PMQ = PAQ = q$, erit ob $PM = y$, $Pq = Qp = y.\,ſin.\,q$; $Mq = y.\,coſ.\,q$. Ex his ergo fiet $AQ = t =$ TAB. II. Fig. 10.

LIB. II. $Ap - Qp = x.\cos q - y.\sin q$, & $QM = u = Mq + Pp = x.\sin q + y.\cos q$.

32. Cum autem sit $\sin q = m$, $\cos q = n$, erit $t = nx - my$ & $u = mx + ny$, hinc fiet $nt + mu = nnx + mmx = x$, & $nu - mt = nny + mmy = y$. Æquatio ergo quæsita inter $t$ & $u$ reperietur, si in æquatione inter $x$ & $y$, proposita ubique loco $x$ scribatur $mu + nt$ & $nu - mt$ loco $y$, si quidem Axis portio $As$ contineat Abscissas affirmativas, & Applicatæ affirmativæ in regionem $QM$ cadant. Posuimus hic etiam angulum $SAs$ in regionem Applicatarum negativarum cadere; quod si autem $As$ supra $AS$ caderet; in calculo angulus $SAs = q$ negativus, ac propterea ejus Sinus $m$ negative accipi deberet.

TAB. III. Fig. 11. 33. Tribuatur nunc novo Axi $rs$ positio quæcunque, in eoque sumatur punctum quodvis $D$ pro Abscissarum initio. Sit $RS$ Axis prior, pro quo habetur æquatio inter Abscissam $AP = x$ & Applicatam $PM = y$, qua natura Curvæ $LM$ exprimitur; unde æquatio inter alias Coordinatas $t$ & $u$ ad novum Axem $rs$ relatas exhiberi debet. Demisso scilicet ex quovis Curvæ puncto $M$ in novum Axem $rs$ perpendiculo $MQ$ vocetur Abscissa $DQ = t$, & Applicata $QM = u$. Inter quas ut æquatio inveniatur, ex novo Abscissarum initio $D$ in Axem priorem $RS$ ducatur perpendicularis $DG$, ac ponatur $AG = f$ & $DG = g$, tum per $D$ priori Axi $RS$ producatur parallela $DO$, cui prior Applicata $PM$ producta occurrat in $O$, eritque $MO = y + g$, & $DO = GP = x + f$. Denique ponatur angulus $ODQ = q$, cujus Sinus sit $= m$, & Cosinus $= n$, posito semper Sinu toto $= 1$, ut sit $mm + nn = 1$.

34. Jam ex puncto $O$ ducantur tam in novum Axem $DQ$ quam in Applicatam $MQ$ normales $Op$ & $Oq$; atque, ob angulum $OMQ = ODQ$ & $DO = x + f$, ac $MO = y + g$, erit $Op = Qq = (x + f).\sin q = mx + mf$ & $Dp = (x + f).\cos q = nx + nf$. Porroque $Oq = Qp = (y + g).\sin q = my + mg$ & $Mq = (y + g).\cos q = ny + ng$. Ex

Ex his igitur colligetur $DQ = t = nx + nf - my - mg$ & $QM = u = mx + mf + ny + ng$, ficque ex $x$ & $y$ definientur novæ Coordinatæ $t$ & $u$. Hinc vero erit $nt + mu = x + f$ & $nu - mt = y + g$, ob $mm + nn = 1$, quocirca habebitur $x = mu + nt - f$, & $y = nu - mt - g$, qui ergo valores si in æquatione inter $x$ & $y$ data loco $x$ & $y$ fubftituantur, prodibit æquatio inter $t$ & $u$, qua ejufdem Curvæ $LM$ natura exprimetur.

Cap. II.

35. Quoniam nullus excogitari poteft Axis $rs$, qui quidem in eodem plano cum Curva fit fitus, qui non in hac poftrema determinatione contineatur; pro eadem quoque Curva $LM$ nulla exiftet æquatio inter Coordinatas orthogonales, quæ non in hac æquatione inter $t$ & $u$ inventa comprehendatur. Cum igitur quantitates $f$ & $g$ cum angulo $q$, unde $m$ & $n$ pendent, infinitis modis variari queant, omnes æquationes, quæ in æquatione inter $t$ & $u$ hoc modo inventa continentur, ejufdem lineæ curvæ naturam exprimeni. Hanc ob rem ifta æquatio inter $t$ & $u$ vocari folet æquatio generalis pro Curva $LM$, quoniam ea in fe complectitur omnes omnino æquationes, quæ ad eandem lineam curvam pertinent.

36. Supra jam innuimus difficile effe ex diverfitate aliquot æquationum inter Coordinatas judicare, utrum eæ ad eandem lineam curvam, an ad diverfas referantur: nunc igitur patet via omnes hujufmodi quæftiones dijudicandi. Sint enim duæ propofitæ æquationes, altera inter $x$ & $y$, & altera inter $t$ & $u$, ponatur in illa $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, ubi $m$ & $n$ ita a fe invicem pendent ut fit $mm + nn = 1$; quo facto difpiciendum erit utrum altera illa æquatio inter $t$ & $u$ in hac, quæ modo eft eruta, contineatur, feu an quantitates $f$, $g$ cum $m$ & $n$ ita definiri poffint, ut ipfa altera æquatio inter $t$ & $u$ refultet. Quod fi fieri poffit, ambæ æquationes eandem lineam curvam exprimeni, fin fecus diverfas.

Lib. II.

### Exemplum.

Hoc modo patebit has duas æquationes.

$$yy - ax = 0$$
&
$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0;$$

ad eandem lineam curvam referri, etiamsi ipsæ plurimum discrepent: si enim in priori æquatione ponamus $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, ea transformabitur in hanc

$$\begin{matrix} nnuu - 2mntu + mmtt - 2ngu + 2mgt + gg \\ - mau - nat + af \end{matrix} = 0.$$

Num igitur in hac altera illa æquatio contineatur, multiplicemus illam per $nn$ hanc vero per $16$, ut termini primi utrinque congruant, habebiturque

$$16nnuu - 24nntu + 9nntt - 55nnau + 10nnat = 0$$
&
$$\begin{matrix} 16nnuu - 32mntu + 16m^2tt - 32ngu + 32mgt + 16gg \\ - 16mau - 16nat + 16af \end{matrix} = 0.$$

Nunc inquiratur quot termini, arbitrariis $f$, $g$, $m$ & $n$ determinandis, æquales reddi queant, ac primo quidem habebimus $24nn = 32mn$ & $9nn = 16mm$, quarum utraque dat $3n = 4m$, & ob $mm = 1 - nn$, erit quoque $25nn = 16$, hinc $n = \frac{4}{5}$ & $m = \frac{3}{5}$, sicque jam tres termini conveniunt. Quartus & quintus dant $55nna = 32ng + 16ma$ & $10nna = 32mg - 16na$, unde an idem pro $g$ valor eruatur videndum est, dat vero prior $g = \frac{55na}{32} - \frac{ma}{2n} = \frac{11a}{8} - \frac{3a}{8} = a$, & posterior $g = \frac{5nna}{16m} + \frac{na}{2m} = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = a$; uterque ergo valor congruit, & jam quinque termini conveniunt. Nil aliud

ergo supereſt, niſi ut ſit $gg + af = 0$, quod, cum $f$ nondum ſit determinatum, nil habet difficultatis, fiet enim $f = -a$. Oſtenſum ergo eſt, has duas æquationes propoſitas eandem lineam curvam exhibere. CAP. II.

37. Quanquam autem fieri poteſt, ut æquationes admodum diverſæ eandem lineam curvam repræſentent, tamen ſæpe numero ex æquationum diverſitate tuto linearum curvarum diverſitas concluditur. Evenit hoc ſi æquationes propoſitæ ad diverſos ordines pertineant, ſeu in quibus maximæ dimenſiones, quas Coordinatæ $x$ & $y$ ſeu $t$ & $u$ conſtituunt, ſunt diverſæ, hoc enim caſu lineæ curvæ, quæ per has æquationes indicantur, certo erunt diverſæ. Cujuſcunque enim ordinis fuerit æquatio inter $x$ & $y$, ſi ponatur $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$, reſultabit æquatio inter $t$ & $u$ ejuſdem ordinis; quare, ſi altera æquatio inter $t$ & $u$ propoſita ad alium ordinem pertineat, Curvam quoque diverſam indicabit.

38. Niſi igitur duæ æquationes, altera inter $x$ & $y$ altera inter $t$ & $u$, ad eundem ordinem pertineant, ſtatim concludendum eſt lineas curvas, quæ allis æquationibus exprimuntur, eſſe diverſas. Dubitatio ergo tantum locum habere poteſt, ſi ambæ æquationes fuerint ejuſdem ordinis, hiſque ſolum caſibus inveſtigatione ante tradita opus erit, quæ autem cum ſatis operoſa evadat, ſi æquationes ad altiorem quempiam ordinem pertineant, infra expeditiores regulæ tradentur, ex quibus ſtatim varietas Curvarum dignoſci poterit.

39. Quæ hic de invenienda æquatione generali pro quavis linea curva ſunt præcepta, eadem ad lineam rectam accommodari poſſunt. Sit enim, loco lineæ curvæ, propoſita linea recta $LM$, quam Axi $RS$ parallelam ſtatuamus: ubicunque ergo initium Abſciſſarum $A$ capiatur, erit ſemper Applicata $PM$ conſtantis magnitudinis, ſeu $y = a$; quæ ergo eſt æquatio pro linea recta Axi parallela. Quæramus hinc æquationem generalem lineæ rectæ ad Axem quemcunque $rs$ relatam; poſito ergo $DG = g$, anguli $ODs$ Sinu $= m$, Coſinu $= n$, & vocata Abſciſſa $DQ = t$, & Applicata $MQ = u$, ob $y =$ TAB. II. *Fig.* 12.

LIB. II. $nu - mt - g$, erit $nu - mt - g - a = 0$, quæ eſt æquatio generalis pro linea recta. Multiplicetur ea per conſtantem $k$ & ponatur $nk = \alpha$, $mk = -\beta$ & $(g + a)\, k = -b$, eritque æquatio $\alpha u + \beta t + b = 0$ pro linea recta, quæ cum ſit æquatio primi ordinis inter $t$ & $u$ generalis, patet omnem æquationem primi ordinis inter duas Coordinatas, nullam lineam curvam, ſed rectam lineam exhibere.

TAB. III. Fig. 13. 40. Quoties ergo inter Coordinatas $x$ & $y$ talis prodit æquatio $\alpha x + \beta y - a = 0$; toties ea præbet lineam rectam, cujus poſitio reſpectu Axis $RS$ ita determinabitur. Ponatur primo $y = 0$, ſicque in Axe reperitur punctum $C$, ubi hæc recta Axem trajicit, fit enim $AC = \frac{a}{\alpha}$; tum ponatur $x = 0$, fietque $y = \frac{a}{\beta}$ qui eſt valor Applicatæ $AB$ in initio Abſciſſarum. Cum ergo habeantur duo puncta, $B$ & $C$, in recta quæſita, ea erit definita, ideoque æquationi propoſitæ ſatisfaciet recta $LM$. Ponatur enim Abſciſſa quæcunque $AP = x$ & reſpondens Applicata $MP = y$, erit ob ſimilitudinem triangulorum $CPM$, $CAB$, $CP : PM = CA : AB$, hoc eſt $\frac{a}{\alpha} - x : y = \frac{a}{\alpha} : \frac{a}{\beta}$, unde fit $\frac{ay}{\alpha} = \frac{aa}{\alpha\beta} - \frac{ax}{\beta}$, ſeu $\alpha x + \beta y = a$, quæ eſt ipſa æquatio propoſita.

41. Si fuerit vel $\alpha$ vel $\beta = 0$, tum iſta conſtructio uſum habere non poterit, at vero iſti caſus per ſe ſunt facillimi. Sit enim $\alpha = 0$, & $y = a$, unde patet lineam ſatisfacientem eſſe rectam Axi parallelam ab eoque intervallo $= a$ remotam, ſin ſit $a = 0$, ſeu $y = 0$, linea ſatisfaciens in Axem incidet. Quod ſi vero fuerit $\beta = 0$, & $x = a$, perſpicuum eſt lineam ſatisfacientem eſſe rectam ad Axem normalem, quæ ab initio Abſciſſarum intervallo $= a$ diſtet. Hoc ſcilicet caſu omnibus Applicatis unica Abſciſſa reſpondet, ita ut Abſciſſa quantitas variabilis eſſe deſinat. Ex his igitur luculenter perſpicitur, quemadmodum lineæ rectæ per æquationes inter Coordinatas orthogonales deſignari queant.

42. Assumsimus hactenus Coordinatas, quibus natura Curvæ definitur, inter se esse normales, simili vero modo etiam ex data æquatione linea curva definietur, si Applicatæ ad Axem sub angulo quocunque inclinentur. Vicissim ergo natura Curvæ exprimi poterit per æquationem inter duas Coordinatas obliquangulas, atque hujusmodi æquationes quoque variatis cum Axe tum principio Abscissarum innumerabilibus modis variari possunt, manente Curva eadem. Sicque pro quavis obliquitate Coordinatarum æquatio generalis ad Curvam exhiberi potest. Quod si vero etiam hæc obliquitas alia atque alia statuatur, multo latius patens eruetur æquatio pro Curva, quam æquationem generalissimam appellabimus, quoniam naturam Curvæ non solum exprimit per æquationem ad quemvis Axem & quodcunque initium Abscissarum relatam, sed etiam pro quacunque Coordinatarum obliquitate. Hæcque adeo æquatio generalissima abibit in æquationem generalem, si angulus, quem Coordinatæ inter se constituunt, rectus statuatur. CAP. II.

43. Data sit pro Curva $LM$ æquatio inter Coordinatas rectangulas, nempe inter $AP = x$ & $PM = y$, & quæratur, retento Axe $RS$ & initio Abscissarum $A$ eodem, æquatio inter Coordinatas, quæ datum angulum comprehendant qui sit $= \varphi$. Ex puncto ergo $M$ ad Axem $RS$ ducatur recta $MQ$ ad angulum illum datum $MQA$, cujus Sinus sit $= \mu$ & Cosinus $= \nu$. Erit ergo $AQ$ nova Abscissa, & $MQ$ nova Applicata: posito ergo $AQ = t$ & $QM = u$, erit in triangulo rectangulo $PMQ$, $\frac{y}{u} = \mu$ & $\frac{PQ}{u} = \nu = \frac{t - x}{u}$. Quocirca fiet $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \nu u + x = \frac{\nu y}{\mu} + x$, & vicissim $y = \mu u$ & $x = t - \nu u$. Consequenter si in æquatione inter $x$ & $y$ proposita ponatur $x = t - \nu u$ & $y = \mu u$ prodibit æquatio inter Coordinatas obliquangulas $t$ & $u$, quæ inter se datum angulum $\varphi$ constituant. TAB. III. Fig. 14.

44. Quod si autem data fuerit pro Curva $LM$ æquatio inter Coordinatas obliquangulas $AQ$ & $QM$; ex ea vicissim

LIB. II. reperietur æquatio pro eadem Curva inter Coordinatas orthogonales $AP$ & $PM$. Sit enim $\varphi$ angulus, quem Applicatæ $MQ$ cum Abscissis $AQ$ constituunt, cujus Sinus $= \mu$ & Cosinus $= \nu$, dataque sit æquatio inter $AQ = t$ & $QM = u$. Ex $M$ ducatur ad Axem Applicata normalis $MP$, &, posita Abscissa $AP = x$ & Applicata $MP = y$, quia est $u = \frac{y}{\mu}$ & $t = \frac{\nu y}{\mu} + x$, si hi valores in æquatione inter $t$ & $u$ proposita substituantur, prodibit æquatio inter $x$ & $y$, quæ quærebatur.

TAB. IV. Fig. 15. 45. Data nunc æquatione inter Coordinatas orthogonales $AP = x$; & $PM = y$ pro Curva $LM$, hoc modo æquatio generalissima pro eadem linea curva inveniri poterit. Sumatur recta quæcunque $rs$ pro Axe, & in eo punctum $D$ pro Abscissarum initio; Applicatæ vero $MT$ ad hunc Axem ductæ faciant angulum $DTM = \varphi$, cujus Sinus sit $= \mu$ & Cosinus $= \nu$; erit ergo nova Abscissa $DT$ & Applicata $TM$, inter quas æquatio quæritur. Ex $D$ in Axem priorem $RS$ ducatur perpendicularis $DG$, & sit $AG = f$; $DG = g$, ductaque $DO$ Axi $RS$ parallela sit anguli $ODs$ Sinus $= m$, Cosinus $= n$. Ducatur, ut ante fecimus, ex $M$ ad Axem novum $rs$ normalis $MQ$, & ponatur $DQ = t$; $QM = u$; Coordinatæ autem obliquangulæ, sint $DT = r$; $TM = s$; Erit ergo primo $t = r - \nu s$ & $u = \mu s$ (43); deinde vero est $x = mu + nt - f$ & $y = nu - mt - g$ (36). Hinc fiet $x = nr - (n\nu - m\mu)s - f$ & $y = -mr(\mu n + \nu m)s - g$, ubi est $n\nu - m\mu$ Cosinus anguli $AVM$, quem novæ Applicatæ cum Axe priori $RS$ constituunt, & $\mu n + \nu m$ est Sinus hujus anguli $AVM$. Quod si ergo in æquatione inter $x$ & $y$ loco $x$ & $y$ illi valores inventi substituantur, prodibit æquatio inter Coordinatas obliquangulas $r$ & $s$, quæ erit æquatio generalissima pro Curva $LM$.

46. Quoniam in valoribus, qui loco $x$ & $y$ substituuntur, novarum variabilium $r$ & $s$ unica inest dimensio, manifestum est æquationem generalissimam ejusdem esse ordinis, cujus erat

æquatio propoſita inter $x$ & $y$. Quomodocunque ergo æquatio ad eandem Curvam transformetur, mutatis utcunque tam Axe, & Abſciſſarum initio, quam inclinatione mutua Coordinatarum, tamen perpetuo æquatio ejuſdem erit ordinis. Quanquam ergo æquatio inter Coordinatas, ſive orthogonales ſive obliquangulas, infinitis modis variari poteſt, ut ad eandem Curvam pertineat; tamen neque ad ordinem altiorem evehi, neque ad inferiorem deprimi poterit. Atque hanc ob cauſam æquationes diverſi ordinis, utcunque alias fuerint affines, tamen ſemper Curvas diverſas, exhibebunt.

## CAPUT III.

### *De Linearum curvarum algebraïcarum in ordines diviſione.*

47. Cum Linearum curvarum pariter ac Functionum varietas ſit infinita, earum cognitio nullo modo acquiri poterit, niſi infinita multitudo in certas claſſes digeratur, hocque modo mens in earum ſcrutatione dirigatur atque adjuvetur. Diviſimus jam quidem Lineas curvas in *algebraïcas* & *tranſcendentes*, verum utraque claſſis, ob infinitam Curvarum varietatem, ulteriori ſubdiviſione opus habet. Hic autem tantum Curvas *algebraïcas* ſpectamus, quas quemadmodum commodiſſime in claſſes diſtribui conveniat, diſpiciamus. Charateres igitur primum definiendi ſunt, quibus claſſium varietates determinentur, ita ut quæ Curvæ eodem charactere ſint præditæ, eæ ad eandem; quæ contra, ad diverſas claſſes referantur.

48. Characteres ergo iſti varias claſſes diſtinguentes aliunde, niſi ex Functionibus ſeu æquationibus, quibus Linearum curvarum natura continetur, peti nequeunt; cum, quia alia via ad Curvarum cognitionem perveniendi adhuc non patet; tum, quia nulla alia, quæ quidem datur, omnes Curvas algebraïcas

LIB. II. sub se complectitur. Functiones vero & æquationes inter binas Coordinatas pluribus modis in diversa genera distribui possunt, uti fecimus in libro superiori. Ac primo quidem Functionum multiformitas se offert, quæ ad Linearum curvarum in varias classes distributionem præ aliis apta videtur; unde hujusmodi divisio orietur, ut eæ Lineæ curvæ, quæ ex Functionibus uniformibus oriuntur, ad genus primum, quæ ex biformibus ad secundum, quæ ex triformibus ad tertium referantur & ita porro.

49. Quamvis autem hæc divisio videatur naturalis, tamen, si diligentius perpendatur, naturæ Linearum curvarum, earumque indoli minime conformis deprehendetur. Multiformitas enim Functionum ab Axis positione, quæ est arbitraria, potissimum pendet, ita ut, si pro uno Axe Applicata fuerit Functio uniformis Abscissæ, eadem, alio assumto Axe, Functio multiformis esse queat; hoc ergo modo eadem Linea curva in diversis generibus occurreret, quod est contra institutum. Sic enim Linea curva hac æquatione $a^3 y = aaxx - x^4$ expressa pertineret ad genus primum, quia Applicata $y$ est Functio uniformis ipsius $x$; permutatis vero Coordinatis, seu Axe sumto ad priorem normali, eadem Curva exprimitur æquatione $y^4 - aayy + a^3 x = 0$, sicque ad genus quartum pertineret. Hanc igitur ob causam multiformitas Functionum ad characterem, quo Lineæ curvæ in classes distribuantur, constituendum admitti nequit.

50. Æque parum simplicitas æquationum naturam Linearum curvarum exprimentium, ratione numeri terminorum characterem distinctionis constituere poterit. Si enim eæ Curvæ ad genus primum referantur quarum æquatio constet duobus terminis, ut $y^m = \alpha x^n$, ad secundum quarum æquatio contineat tres terminos ut $\alpha y^m + \beta y^p x^q + \gamma x^n = 0$, & ita porro, manifestum est eandem Lineam curvam in pluribus generibus occurrere. Per exemplum enim §. 36. subjunctum Linea curva æquatione

æquatione $yy - ax = 0$ contenta simul ad genus primum & quartum referri deberet, quia, mutato Axe, etiam hac æquatione 

$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0,$$

exprimitur. Deberet vero etiam, aliter assumto Axe & Abscissarum initio, simul ad genus secundum, tertium, & quintum pertinere; ex quo ista divisio adhiberi omnino non potest.

51. Hæc incommoda evitabuntur si æquationum, quibus relatio inter Coordinatas exprimitur, ordines ad Curvarum classes constituendas adhibeantur. Cum enim pro eadem Linea curva, utcunque tam Axis & principium Abscissarum quam inclinatio Coordinatarum varietur; æquatio ejusdem semper ordinis maneat; eadem Linea curva non ad diversas classes referetur. Charactere ergo in numero dimensionum, quas Coordinatæ, sive orthogonales sive obliquangulæ, in æquatione complent, constituto, neque Axis neque principii Abscissarum mutatio, neque inclinationis Coordinatarum variatio, classium constitutionem perturbabit. Atque eadem Curva, sive æquatio inter Coordinatas specialis quæque sive generalis sive etiam generalissima spectetur, ad eandem semper classem annumerabitur. Quam ob rem character distinctionis Linearum curvarum convenientissime ab ordine æquationum petitur.

52. Quoniam igitur hæc diversa æquationum genera, quæ ex dimensionum numero constituuntur, ordines vocavimus, diversa quoque Linearum curvarum genera, quæ hinc oriuntur, ordinum nomine appellabimus. Cum ergo æquatio primi ordinis generalis sit

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y$$

omnes Lineas curvas, quæ sumtis $x$ & $y$ pro Coordinatis, sive orthogonalibus sive obliquangulis, ex hac æquatione proficiscuntur, ad ordinem primum referemus. Supra autem vidimus in hac æquatione tantum Lineam rectam contineri, & hanc ob

 rem primus ordo solam Lineam rectam in se complectitur, quæ utique inter omnes Lineas est simplicissima. Cum igitur nomen Curvæ huic primo ordini non conveniat, hos ordines non *Linearum curvarum*, sed vocabulo latiori simpliciter *Linearum* vocabimus. Ordo ergo Linearum primus nullam Lineam curvam continet, sed a sola Linea recta exhauritur.

53. Perinde autem est sive Coordinatæ statuantur rectangulæ sive obliquangulæ; quod si enim Applicatæ cum Axe faciant angulum $\varphi$, cujus Sinus sit $\mu$ & Cosinus $\nu$, æquatio ad Coordinatas orthogonales reducetur, ponendo $y = \frac{u}{\mu}$ & $x = \frac{\nu u}{\mu} + t$ (44), unde ista inter Coordinatas orthogonales $t$ & $u$, æquatio nascitur

$$o = \alpha + \beta t + \left(\frac{\beta\nu}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu}\right) u,$$

quæ cum non minus late pateat quam prior, utraque enim est generalis, manifestum est significationem æquationis non restringi, etiamsi angulus, quem Applicatæ cum Axe faciant, rectus statuatur. Hoc idem eveniet in æquationibus sequentium ordinum generalibus, quæ non minus late patebunt, etsi Coordinatæ orthogonales statuantur. Cum igitur æquatio generalis cujusque ordinis per determinationem inclinationis Applicatarum ad Axem nihil de vi sua perdat, ejus significatum non restringemus, si Coordinatas orthogonales statuamus. Quæcunque enim Linea curva in æquatione generali cujusque ordinis continetur, sumtis Coordinatis obliquangulis, eadem Linea curva in eadem æquatione continebitur, si Coordinatæ rectangulæ statuantur.

54. Lineæ porro secundi ordinis omnes continebuntur in hac æquatione generali ordinis secundi.

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon x y + \zeta y^2$$

Omnes scilicet Lineas curvas, quas hæc æquatio, denotantibus litteris $x$ & $y$ Coordinatas orthogonales, in se complectitur, ad ordinem Linearum secundum numeramus. Sunt igitur hæ Lineæ curvæ simplicissimæ, quia in ordine primo nulla Linea curva continetur, & hanc ob rem a quibusdam Lineæ curvæ primi ordinis vocari solent. Lineæ vero istæ curvæ in hac æquatione contentæ sub nomine *Sectionum conicarum* vulgo innotuerunt, quia eædem omnes ex sectione Coni nascuntur. Diversæ harum Linearum species sunt Circulus, Ellipsis, Parabola & Hyperbola, quas infra ex æquatione generali deducemus.

55. Ad tertium porro Linearum ordinem referuntur omnes Lineæ curvæ, quas sequens æquatio tertii ordinis generalis suppeditat

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta x^2 y + \iota xy^2 + \kappa y^3$$

sumtis $x$ & $y$ pro Coordinatis orthogonalibus, quia conditio obliquitatis Applicatarum ampliorem significatum huic æquationi non inducit, ut jam notavimus. Quia in hac æquatione multo plures, quam in præcedente habentur litteræ constantes, quas pro arbitrio definire licet, etiam multo major specierum diversarum numerus in hoc ordine continetur, quarum enumerationem exhibuit NEWTONUS.

56. Ad quartum Linearum ordinem pertinent omnes Lineæ curvæ, quas hæc æquatio generalis quarti ordinis exhibet

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \theta xy^2 + \iota xy^2 + \kappa x^3$$
$$+ \lambda x^4 + \mu xy^3 + \nu x^2 y^2 + \xi xy^3 + o y^4,$$

sumtis $x$ & $y$ pro Coordinatis orthogonalibus, quia obliquitas Applicatarum æquationi majorem generalitatem non inducit. Occurrunt ergo in hac æquatione quindecim quantitates constantes, pro arbitrio definiendæ, unde multo major specierum diversarum varietas in hoc ordine occurrit, quam in præcedente. Lineæ istæ quarti ordinis vocari etiam solent Lineæ

 curvæ tertii ordinis, quia Linearum ordo ſecundus pro Linearum curvarum ordine primo reputatur; ſimilique modo Lineæ tertii ordinis conveniunt cum Lineis curvis ſecundi ordinis.

57. Ex his jam intelligitur, quænam Lineæ curvæ ad ordinem quintum, ſextum, ſeptimum & ſequentes pertineant. Æquatio autem generalis omnes Lineas quinti ordinis in ſe complectens, quia ad æquationem generalem quarti ordinis inſuper accedunt termini,

$$x^5;\ x^4y;\ x^3y^2;\ x^2y^3;\ xy^4;\ y^5$$

conſtabit omnino terminis viginti & uno, & æquatio generalis omnes Lineas ſexti ordinis continens habebit viginti & octo terminos, & ita porro ſecundum numeros trigonales. Scilicet æquatio generalis pro Lineis ordinis $n$ continebit $\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}$ terminos, totidemque in ea inerunt litteræ conſtantes, quas pro arbitrio definire licet.

58. Neque vero quælibet litterarum conſtantium diverſa determinatio diverſas Lineas curvas producit. Vidimus enim in præcedente Capite pro eadem Linea curva, mutatis Axe & Abſciſſarum initio, infinitas exhiberi poſſe æquationes diverſas; unde ex diverſitate æquationum ad eundem ordinem pertinentium non ſequitur Curvarum iis æquationibus indicatarum diverſitas. Quam ob rem in enumeratione generum ac ſpecierum ad eundem ordinem pertinentium, quæ ex æquatione generali deducitur, admodum cautum eſſe opportet, ne eadem Linea curva ad duas pluresve ſpecies referatur.

59. Cum igitur ex ordine æquationis, quæ inter Coordinatas datur, Lineæ curvæ ordo cognoſcatur, propoſita quacunque æquatione algebraïca inter Coordinatas $x$ & $y$, ſtatim conſtabit, ad quemnam ordinem Linea curva illa æquatione indicata ſit referenda. Primum Scilicet æquatio, ſi ſit irrationalis, ab irrationalitate liberari, tumque, ſi fractiones ſuperfuerint, ab his purgari debebit, quo facto maximus dimenſionum

numerus, quem variabiles $x$ & $y$ in ea constituunt, ordinem, ad quem Linea curva pertinet, indicabit. Sic Linea curva, quam hæc æquatio $yy - ax = 0$ dat, erit ordinis secundi: Linea curva autem in hac æquatione $yy = x\sqrt{(aa - xx)}$ (quæ ab irrationalitate liberata fit ordinis quarti) contenta erit ordinis quarti. Et Linea curva, quam hæc æquatio præbet $y = \frac{a^3 - axx}{aa + xx}$, erit ordinis tertii, quia æquatio a fractionibus liberata fit $aay + xxy = a^3 - axx$, in cujus termino $xxy$ tres sunt dimensiones.

60. In una eademque autem æquatione plures Lineæ curvæ diversæ contineri possunt, prout Applicatæ ad Axem vel normales vel sub data obliquitate constitutæ ponuntur. Sic hæc æquatio $yy = aa - xx$, si Coordinatæ ponantur orthogonales, præbet Circulum, sin autem Coordinatæ obliquangulæ statuantur, tum Curva erit Ellipsis. Omnes tamen istæ Curvæ diversæ ad eundem ordinem pertinent, quia reductione Coordinatarum obliquangularum ad rectangulas ordo Curvæ non mutatur. Quanquam ergo æquatio generalis pro Lineis curvis cujusque ordinis ob angulum, quo Applicatæ Axi insistunt, neque latius neque minus late patens redditur, tamen proposita æquatione speciali Linea curva in ea contenta non determinatur, nisi angulus quem Coordinatæ inter se constituunt, determinetur.

61. Quo Linea curva ad eum ordinem, quem æquatio indicat, proprie referatur, necesse est, ut æquatio in Factores rationales resolvi nequeat. Si enim æquatio duos pluresve habeat Factores, tum duas pluresve involvet æquationes, quarum quælibet peculiarem Lineam curvam generabit, quæ junctim sumtæ æquationis propositæ vim exhaurient. Hujusmodi ergo æquationes in Factores resolubiles non unam sed plures Curvas continuas in se complectuntur, quarum quævis peculiari æquatione exprimi queat; & quæ aliter inter se non sunt connexæ; nisi quod earum æquationes in se mutuo sint multiplicatæ. Qui cum sit nexus ab arbitrio nostro pendens, ejus-

 modi Lineæ curvæ non unam continuam Lineam constituere censeri possunt. Tales ergo æquationes, quas supra complexas vocavimus, producent Lineas curvas non continuas, attamen ex continuis compositas, quas propterea complexas vocabimus.

62. Sic hæc æquatio $yy = ay + xy - ax$, quæ ad Lineam secundi ordinis esse videtur, si ad nihilum reducatur, ut fit $yy - ay - xy + ax = 0$ constabit ex his Factoribus $(y - x)(y - a) = 0$, complectitur ergo has duas æquationes $y - x = 0$ & $y - a = 0$, quarum utraque est pro Linea recta, illa scilicet cum Axe in initio Abscissarum angulum semirectum constituit, hæc vero Axi ad distantiam $= a$ est parallela. Duæ ergo istæ lineæ rectæ simul consideratæ in æquatione proposita $yy = ay + xy - ax$ continentur. Simili modo hæc æquatio est complexa $y^4 - xy^3 - aaxx - ay^3 + axxy + aaxy = 0$ neque propterea Lineam continuam quarti ordinis exhibet, cum enim Factores sint $(y - x)(y - a)(yy - ax)$ tres continebit lineas discretas, duas scilicet rectas & unam Curvam in æquatione $yy - ax = 0$ contentam.

63. Possunt ergo pro lubitu Lineæ complexæ quæcunque formari, quæ complectantur duas pluresve Lineas sive rectas sive curvas ad arbitrium descriptas. Quod si enim unius cujusque Lineæ natura exprimatur per æquationem ad eundem Axem idemque Abscissarum initium relatam, hæque æquationes singulæ, postquam ad cyphram fuerint reductæ, in se multiplicentur, prodibit æquatio complexa, in qua omnes Lineæ assumtæ simul continentur. Ita, si propositus fuerit Circulus centro $C$ & Radio $CA = a$ descriptus, ac præterea Linea recta $LN$ per Centrum $C$ transiens, æquatio pro quovis Axe exhiberi poterit, quæ Circulum & Lineam rectam, quasi ambo unam Lineam constituerent, conjunctim complectatur.

Tab. IV. Fig. 16.

64. Sumatur diameter $AB$, quæ cum recta $LN$ angulum semirectum constituat pro Axe, ac sumto initio Abscissarum in $A$, vocatisque Abscissa $AP = x$, & Applicata $PM = y$, erit pro Linea recta $PM = CP = a - x$, & quia punctum

rectæ $M$ in regionem Applicatarum negativarum cadit, erit $y = -a + x$, seu $y - x + a = 0$. Pro Circulo autem cum sit $PM^2 = AP.PB$, ob $BP = 2a - x$, erit $yy = 2ax - xx$ seu $yy + xx - 2ax = 0$. Multiplicentur jam hæ duæ æquationes in se invicem ac prodibit æquatio tertii ordinis complexa

$$y^3 - y^2x + yxx - x^3 + ayy - 2axy + 3axx - 2aax = 0;$$

quæ tam Circulum quam lineam rectam simul in se complectetur. Abscissæ scilicet $AP = x$ respondere invenientur tres Applicatæ, binæ Circuli & una rectæ: sit nimirum $x = \frac{1}{2}a$, fiet $y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}aay - \frac{3}{8}a^3 = 0$, unde fit primo $y + \frac{1}{2}a = 0$ tum divisione per hanc radicem instituta erit $yy - \frac{3}{4}aa = 0$, unde tres valores ipsius $y$ erunt.

I. $y = -\frac{1}{2}a$;

II. $y = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$;

III. $y = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

Quasi ergo Circulus cum recta $LN$ unum continuum constituerit, ita in æquatione repræsentatur.

65. Notato hoc discrimine inter Curvas incomplexas & complexas, perspicuum est Lineas secundi ordinis vel esse Curvas continuas, vel ex duabus Lineis rectis complexas; si enim æquatio generalis habet Factores, hi erunt primi ordinis, ideoque Lineas rectas denotabunt. Lineæ autem tertii ordinis erunt vel incomplexæ, vel ex una recta & una Linea secundi ordinis complexæ, vel ex tribus Lineis rectis complexæ. Porro Lineæ quarti ordinis erunt vel continuæ seu incomplexæ, vel ex una Linea recta & una Linea tertii ordinis complexæ, vel ex dua-

bus Lineis secundi ordinis complexæ, vel ex Linea secundi ordinis una & duabus rectis vel denique ex quatuor Lineis rectis complexæ erunt. Similiter ratio Linearum complexarum ordinis quinti altiorumque ordinum est comparata parique modo enumerari poterit. Ex quo patet in quovis Linearum ordine simul omnes Lineas ordinum inferiorum comprehendi, neque vero simpliciter, sed quælibet ordinum inferiorum complexa cum Linea vel Lineis rectis, vel cum Lineis secundi, tertii, sequentiumve ordinum, ita tamen, ut si numeri singulorum ordinum ad quos Lineæ simplices pertinent in unam summam addantur, prodeat numerus, quo ordo Lineæ complexæ indicatur.

---

## CAPUT IV.

### *De Linearum cujusque ordinis præcipuis proprietatibus.*

66. INTER præcipuas proprietates Linearum cujusque ordinis primum locum tenet earum concursus cum Linea recta, seu intersectionum multitudo, quas Linea recta cum Lineis cujusque ordinis facere potest. Cum enim Linea primi ordinis, seu recta, ab alia Linea recta nonnisi in unico puncto secari possit, Lineæ curvæ autem in pluribus punctis a Linea recta secari queant; merito ergo quæri solet in quot punctis Linea curva cujusque ordinis secari possit a Linea recta utcunque ducta: ex ipsa enim hac quæstione natura Linearum curvarum ad varios ordines pertinentium melius cognoscetur. Reperietur autem Linea secundi ordinis a recta in pluribus quam duobus punctis secari non posse: Linea autem tertii ordinis a recta in pluribus quam tribus punctis secari nequit, & ita porro.

67. Supra jam mentionem fecimus modi, quo determinari potest in quot punctis Axis cujusque Curvæ ab ipsa Curva secetur. Data enim æquatione inter Abscissam $x$ & Applicatam

catam

catam $y$, quia ubi Curvæ punctum in Axem incidit, ibi Applicata $y$ fit $=0$, ponatur in æquatione $y=0$, atque æquatio resultans, quæ tantum $x$ continebit, monstrabit valores ipsius $x$, hincque Axis puncta, ubi Curva ipsum secabit. Ita in æquatione pro Circulo, quam supra invenimus, $yy=2ax-xx$, si ponamus $y=0$, fit $0=2ax-xx$, unde duo valores ipsius $x$ resultant, $x=0$ & $x=2a$, qui indicant Axem $RS$ primo in ipso Abscissarum initio $A$, tum vero in puncto $B$, existente $AB=2a$, a Circulo intersecari. Similique modo in aliis Lineis curvis, posito in æquatione $y=0$, radices ipsius $x$ indicabunt intersectiones Curvæ cum Axe. TAB. IV. Fig. 16.

68. Quoniam in æquatione generali pro quavis Curva, Linea recta quæcunque vicem Axis sustinet, si in æquatione generali ponatur Applicata $y=0$, æquatio remanens indicabit in quot punctis Linea curva a recta quacunque trajiciatur. Prodibit autem æquatio Abscissam solam $x$, tanquam incognitam, complectens, cujus singulæ radices ostendent intersectiones Curvæ cum Axe. Pendebit ergo intersectionum numerus a maxima ipsius $x$ in æquatione potestate, hincque major esse non poterit quam exponens summæ ipsius $x$ potestatis. Tot vero erunt intersectiones, quot exponens maximæ potestatis ipsius $x$ continet unitates, si omnes radices æquationis fuerint reales, sin autem aliquot radices fuerint imaginariæ, intersectionum numerus tanto erit minor.

69. Cum igitur pro quovis Linearum ordine æquationes generalissimas exhibuerimus; ex iis, modo exposito, invenire poterimus, in quot punctis Lineæ cujusque ordinis a recta quacunque secari queant. Sumamus ergo æquationem pro Lineis primi ordinis seu pro Linea recta generalem, $0=\alpha+\beta x+\gamma y$, ex qua, posito $y=0$, fit $0=\alpha+\beta x$, quæ æquatio plus una radice habere nequit, unde patet Lineam rectam ab alia recta in unico puncto secari. Sin autem sit $\beta=0$, æquatio $0=\alpha$ impossibilis indicat hoc casu Axem a Linea recta nusquam secari, erunt enim ambæ hæ Lineæ rectæ inter se parallelæ, uti patet ex æquatione $0=\alpha+\gamma y$, quæ oritur si $\beta=0$.

Lib. II. 70. Si in æquatione generali pro Lineis fecundi ordinis

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \epsilon xy + \zeta yy$$

ponamus $y = 0$, prodibit hæc æquatio

$$0 = \alpha + \beta x + \delta xx,$$

quæ æquatio vel duas habet radices reales, vel nullam, vel etiam unicam fi $\delta = 0$. Hinc Linea fecundi ordinis a Linea recta vel in duobus punctis fecabitur, vel in unico, vel nufquam. Qui cafus omnes fic in unum comprehendi poffunt, ut dicamus Lineam fecundi ordinis a Linea recta plufquam in duobus punctis fecari non poffe.

71. Si in æquatione generali pro Lineis tertii ordinis ponamus $y = 0$, prodibit hujufmodi æquatio

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3,$$

quæ cum plures tribus radicibus habere nequeat, perfpicuum eft Lineas tertii ordinis a Linea recta in pluribus quam tribus punctis fecari non poffe. Fieri vero poteft ut Linea tertii ordinis a Linea recta in paucioribus punctis fecetur, nempe vel in duobus, fi $\delta = 0$, & æquationis $0 = \alpha + \beta x + \gamma xx$ ambæ radices fuerint reales; vel in unico fi fuperioris æquationis duæ radices fuerint imaginariæ, aut fi fit & $\delta = 0$ & $\gamma = 0$; vel etiam nufquam fi $\delta = 0$ & reliquæ æquationis ambæ radices fuerint imaginariæ, quod idem evenit fi $\beta$, $\gamma$, & $\delta$ evanefcant, at $\alpha$ fuerit quantitas non æqualis nihilo.

72. Simili modo colligetur Lineas quarti ordinis a recta in pluribus quam quatuor punctis fecari non poffe; hæcque Proprietas ad omnes Linearum ordines ita extendetur, ut Lineæ ordinis $n$ a Linea recta in pluribus quam $n$ punctis fecari nequeant. Neque vero hinc fequitur omnem Lineam ordinis $n$ a quavis Linea recta in $n$ punctis fecari, fed utique fieri poteft ut numerus interfectionum fit minor, imo fubinde prorfus nullus, uti de Lineis fecundi & tertii ordinis annotavimus. In

hoc ergo tantum propositionis vis est posita, quod intersectionum numerus major nunquam esse possit, quam exponens ordinis ad quem Linea curva refertur. CAP. IV

73. Ex numero igitur intersectionum, quas Linea recta quæcunque cum data Linea curva facit, ordo ad quem Linea curva pertineat, definiri non poterit. Si enim intersectionum numerus sit $= n$, non sequitur Curvam ad ordinem Linearum $n$ pertinere, sed ad quemvis ordinem superiorem æque referri poterit: quin etiam fieri potest ut Curva ne quidem sit algebraica sed transcendens. Excludendo autem semper tuto affirmari potest, Lineam curvam, quæ a recta in $n$ punctis secetur, ad nullum Linearum ordinem inferiorem pertinere posse. Sic, si proposita Linea curva a recta in quatuor punctis secetur, certum est, eam neque ad ordinem secundum, neque tertium referri; utrum autem in ordine quarto, aut superiori quopiam contineatur, an sit transcendens, hinc dijudicari non potest.

74. Æquationes generales, quas pro Lineis cujusque ordinis exhibuimus, plures continent quantitates constantes arbitrarias, quibus si valores determinati tribuantur, Lineæ curvæ penitus determinabuntur, atque ad datum Axem ita describentur, ut reliquæ Lineæ curvæ omnes, quæ quidem in eadem æquatione generali continebantur, excludantur. Ita, quamvis in æquatione primi ordinis $o = \alpha + \beta x + \gamma y$ sola Linea recta contineatur; tamen ejus posito respectu Axis infinitis modis variari potest, pro diversis infinitis valoribus quantitatum constantium $\alpha, \beta, \gamma$. Quamprimum autem his quantitatibus constantibus definiti valores tribuuntur, positio Lineæ rectæ determinatur, ut præter hanc nulla alia æquationi satisfacere queat.

75. Hæc igitur æquatio $o = \alpha + \beta x + \gamma y$ tres determinationes admittere videri posset, ob tres constantes arbitrarias $\alpha, \beta, \& \gamma$. Verum ex natura æquationum intelligitur æquationem jam determinari, si tantum ratio inter has constantes definiatur, scilicet ratio binarum ad unam; ex quo ista æquatio duas tantum admittet determinationes. Si enim $\beta$ & $\gamma$

LIB. II. per $\alpha$ ita determinentur ut sit $\beta = -\alpha$ & $\gamma = 2\alpha$, æquatio $0 = \alpha - \alpha x + 2\alpha y$, quia $\alpha$ per divisionem exit, jam prorsus erit determinata. Similem ob rationem æquatio generalis pro Lineis secundi ordinis, quæ sex continet constantes arbitrarias, quinque tantum admittit determinationes, æquatio generalis pro Lineis tertii ordinis novem; & generaliter æquatio generalis pro Lineis ordinis $n$ patietur $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ determinationes.

76. Semper autem istæ constantes arbitrariæ ita definiri possunt ut Linea curva per datum punctum transeat, hocque modo una determinatio orietur. Sit enim proposita æquatio generalis pro quovis ordine Linearum, quæ ita definiri debeat, ut Linea curva per datum punctum $B$ transeat. Sumto pro lubitu Axe, in eoque Abscissarum initio $A$, demittatur ex puncto $B$ in Axem perpendicularis $Bb$, atque manifestum est, si Curva transeat per punctum $B$, tum posito intervallo $Ab$ pro $x$, perpendicularem $Bb$ præbere valorem Applicatæ $y$. Quare in æquatione generali proposita, loco $x$ substituatur $Ab$, & $Bb$ loco $y$, sicque orietur æquatio, ex qua una quantitatum constantium $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, &c., definiri poterit; quo facto omnes Curvæ, quæ in æquatione generali hoc modo determinata continentur, per punctum datum $B$ transibunt.

TAB. IV. Fig. 17.

77. Si Linea curva insuper per punctum $C$ transire debeat, inde ad Axem perpendiculo $Cc$ demisso, & in æquatione posito $x = Ac$ & $y = Cc$, nova orietur æquatio ex qua pariter una ex quantitatibus constantibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c., definietur. Eodem modo intelligitur si tria puncta $B, C, D$ præscribantur, per quæ Linea curva transire debeat, inde tres constantes definiri; ex quatuor autem punctis $B, C, D, E$ quatuor litteras constantes determinationem accipere. Quod si ergo tot puncta, per quæ Linea curva transeat: proponantur quot determinationes æquatio generalis admittit, tum Linea curva penitus erit determinata, ideoque unica, quæ quidem per omnia puncta proposita transeat.

78. Cum igitur æquatio generalis pro Lineis primi ordinis, seu pro Linea recta, duas tantum determinationes admittat, propositis duobus punctis, per quæ Linea primi ordinis, seu recta, transeat, Linea recta penitus determinatur; neque per duo puncta data plures quam una Linea recta duci poterunt, quod quidem ex Elementis intelligitur. Sin autem unum tantum proponeretur punctum, tum, ob æquationem nundum determinatam, adhuc infinitæ Lineæ rectæ per idem punctum duci possunt.

79. Æquatio generalis pro Lineis secundi ordinis quinque admittit determinationes; unde si quinque proponantur puncta, per quæ Linea curva transire debeat, Linea secundi ordinis penitus determinatur. Hanc ob rem per quinque data puncta unica Linea secundi ordinis duci potest; sin autem quatuor tantum vel pauciora puncta proponantur, quia iis æquatio nundum penitus determinatur, innumerabiles Lineæ, quæ omnes sint ordinis secundi per ea duci poterunt. Quod si autem quinque illorum punctorum tria in directum jaceant, quia Linea secundi ordinis a recta in tribus punctis secari nequit, nulla Linea curva continua reperietur, sed prodibit Linea complexa, duæ nempe Lineæ rectæ, quæ, uti jam monuimus, in æquatione generali secundi ordinis continentur.

80. Quia porro æquatio generalis pro Lineis tertii ordinis novem determinationes admittit, per novem puncta pro libitu assumta Linea tertii ordinis semper duci poterit, atque unica. Sin autem numerus punctorum novenario fuerit minor, tum per ea innumerabiles Lineæ tertii ordinis duci poterunt. Simili modo per quatuordecim puncta data unica Linea quarti ordinis, per viginti puncta unica Linea quinti ordinis duci poterit, & ita porro. Atque in genere Lineæ ordinis $n$ determinabuntur per tot puncta quot hæc formula $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ continet unitates; ita ut, si numerus punc-

LIB. II. torum datorum fuerit minor, per ea puncta innumerabiles Lineæ ordinis $n$ duci queant.

81. Nisi ergo plura puncta, quam $\frac{n(n+3)}{2}$, proponantur; semper una vel infinitæ Lineæ ordinis $n$ per ea duci poterunt: unica scilicet, si numerus punctorum datorum fuerit $= \frac{n(n+3)}{2}$, & infinitæ, si sit minor. Nunquam autem, utcunque hæc puncta fuerint disposita, solutio evadet impossibilis, determinatio enim coëfficientium $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, &c., nunquam resolutionem æquationis quadraticæ vel altioris potestatis requirit, sed tota per æquationes simplices absolvetur. Ex quo neque unquam valores imaginarii pro quantitatibus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, &c., reperientur, neque valores multiformes; hancque ob causam semper Linea realis per proposita puncta transiens prodibit; atque unica, si quidem tot puncta proponantur, quot determinationes æquatio generalis admittit.

82. Quoniam Axis pro lubitu assumi potest, ista coëfficientium determinatio facilior fiet, si Axis per unum punctorum datorum ducatur, atque initium Abscissarum in ipso hoc puncto $A$ statuatur; sic enim posito $x = 0$ fieri debebit $y = 0$, unde in æquatione generali proposita

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \&c.,$$

statim fit $\alpha = 0$. Deinde Axis quoque per aliud punctum datorum transire poterit, quo pacto numerus quantitatum, quibus positio punctorum datorum definitur, minuetur. Denique, loco Applicatarum orthogonalium ejusmodi obliquangulæ eligi possunt, ut Applicata in initio Abscissarum ducta pariter per punctum datum transeat. Curvæ enim cognitio & constructio ex æquatione æque facile deducitur, sive Applicatæ orthogonales sive obliquangulæ statuantur.

TAB. IV. Fig. 18. 83. Si quæratur Linea secundi ordinis quæ per quinque data puncta $A$, $B$, $C$, $D$, & $E$ transeat, ducatur Axis per duo

puncta $A, B$ : sumaturque initium Abscissarum in altero puncto $A$. Tum jungatur hoc punctum $A$ cum tertio $C$, sumaturque angulus $CAB$ pro obliquitate Applicatarum. Quare ex reliquis punctis $D$ & $E$ ad Axem ducantur Applicatæ $Dd$ & $Ee$ illi $AC$ parallelæ. Ponatur $AB = a$; $AC = b$; $Ad = c$; $Dd = d$; $Ae = e$, & $eE = f$; atque sumta æquatione generali Linearum secundi ordinis

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2$$

manifestum est

| posito | fore |
|---|---|
| $x = 0$ | $y = 0$ |
| $x = 0$ | $y = b$ |
| $x = a$ | $y = 0$ |
| $x = c$ | $y = d$ |
| $x = e$ | $y = f$ |

Hinc orientur sequentes quinque æquationes

I. $0 = \alpha$

II. $0 = \alpha + \gamma b + \zeta b^2$

III. $0 = \alpha + \beta a + \delta a^2$

IV. $0 = \alpha + \beta c + \gamma d + \delta c^2 + \epsilon cd + \zeta d^2$

V. $0 = \alpha + \beta e + \gamma f + \delta e^2 + \epsilon ef + \zeta f^2$

Erit ergo $\alpha = 0$; $\gamma = -\zeta b$; $\beta = -\delta a$, qui valores in reliquis substituti dant

$$0 = -\delta ac - \zeta bd + \delta cc + \epsilon cd + \zeta dd$$
$$0 = -\delta ae - \zeta bf + \delta ee + \epsilon ef + \zeta ff$$

multiplicentur superior per $ef$ & inferior per $cd$ & altera ab altera subtrahatur, ut eliminetur $\epsilon$, ac proveniet

$$0 = -\delta acef - \zeta bdef + \delta ccef + \zeta ddef$$
$$+ \delta acde + \zeta bcdf - \delta cdee - \zeta cdff$$

seu

$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{bdef - bcdf - ddef + cdff}{acde - acef - cdee + ccef},$$

unde fit

$$\delta = df(be - bc - de + cf)$$
$$\zeta = ce(ad - af - de + cf)$$

hincque omnes coëfficientes determinabuntur.

84. Determinatis autem hoc modo omnibus coëfficientibus æquationis generalis $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \&c.$, super Axe assumto & sub constituta Applicatarum obliquitate, Linea curva describetur per puncta infinita per æquationem invenienda, hæcque Linea curva transibit per omnia puncta proposita. Si æquatio generalis plures admittat determinationes quam fuerint puncta proposita, tum reliquis pro lubitu assumtis Linea curva per singula puncta data describetur ope æquationis omnino determinatæ. Tribuuntur autem Abscissæ $x$ successive plures valores tam affirmativi quam negativi ut $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, &c., & $-1, -2, -3, -4$, &c., ac pro singulis ex æquatione investigantur valores Applicatæ $y$ convenientes, sicque plurima innotescunt puncta satis vicina, per quæ Curva transibit, ex quibus proinde tractus Curvæ facile perspicietur.

CAPUT

# CAPUT V.

## *De Lineis secundi Ordinis.*

85. QUIA in Linearum ordine primo sola Linea recta continetur cujus indoles jam satis ex Geometria elementari constat, Lineas SECUNDI ORDINIS aliquanto diligentius contemplemur, quod eæ inter omnes Lineas curvas sint simplicissimæ, atque per totam Geometriam sublimiorem usum habeant amplissimum. Præditæ autem sunt istæ Lineæ, quæ etiam SECTIONES CONICÆ vocantur, plurimis insignibus proprietatibus, quas cum antiquissimi Geometræ eruerunt, tum recentiores amplificarunt. Harumque proprietatum cognitio adeo necessaria judicatur, ut a plerisque Auctoribus statim post Geometriam elementarem explicari soleant. Quoniam vero istæ proprietates omnes non ex uno principio derivari possunt, sed alias æquatio patefecit, alias generatio ex Sectione Coni, alias denique alii describendi modi, hic tantum eas proprietates investigabimus, quas æquatio sola sine aliis subsidiis suppeditat.

86. Consideremus ergo æquationem generalem pro Lineis secundi ordinis, quæ est

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta yy,$$

quam æquationem ita comparatam esse ostendimus, ut, quocunque angulo Applicatæ ad Axem inclinatæ statuantur, ea tamen semper omnes Lineas secundi Ordinis in se complectatur. Tribuatur jam isti æquationi hæc forma

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)y}{\zeta} + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

ex qua patet cuique Abscissæ $x$ respondere vel duas Applica-

LIB. II. tas $y$, vel nullam, prout binæ radices ipſius $y$ fuerint vel reales vel imaginariæ. Quod ſi autem fuerit $\zeta = 0$ tum unica quidem Applicata ſingulis Abſciſſis reſpondebit, altera abeunte in infinitum, quam ob rem iſte caſus noſtram indagationem non turbabit.

TAB. V. Fig. 19. 87. Quoties autem ambo ipſius $y$ valores fuerint reales; id quod evenit, ſi Applicata $PMN$ Curvam in duobus punctis $M$ & $N$ interſecat, erit ſumma radicum $PM + PN = \frac{-\epsilon x - \gamma}{\zeta} = \frac{-\epsilon . AP - \gamma}{\zeta}$, ſumta recta $AEF$ pro Axe, $A$ pro initio Abſciſſarum, & angulo $APN$, quo Applicatæ Axi inſiſtunt, poſito obliquo pro lubitu. Quod ſi ergo ſub eodem angulo ducatur quævis alia Applicata $npm$, cujus quidem valor $pm$ eſt negativus, erit eodem modo $pn - pm = \frac{-\epsilon . Ap - \gamma}{\zeta}$. Subtrahatur hæc æquatio a priori, erit $PM + pm + PN - pn = \frac{\epsilon (Ap - AP)}{\zeta} = \frac{\epsilon . Pp}{\zeta}$. Ducantur ex punctis $m$ & $n$ rectæ Axi parallelæ, donec priori Applicatæ occurrant in punctis $\mu$ & $\nu$, eritque $M\mu + N\nu = \frac{\epsilon . Pp}{\zeta}$, ſeu ſumma $M\mu + N\nu$ ad $Pp$ ſeu $m\mu$ ſeu $n\nu$ rationem habebit conſtantem ut $\epsilon$ ad $\zeta$. Ratio ſcilicet hæc perpetuo erit eadem, ubicunque in Curva ducantur rectæ $MN$ & $mn$, dummodo cum Axe datum faciant angulum, atque rectæ $n\nu$ & $m\mu$ Axi parallelæ ducantur.

TAB. V. Fig. 20. 88. Si Applicata $PMN$ eo promoveatur, quo puncta $M$ & $N$ coincidant, tum Applicata tanget Curvam; ubi enim duæ interſectiones conveniunt, ibi Linea ſecans abit in tangentem. Sit igitur $KCI$ ejuſmodi tangens, cui ducantur parallelæ quotcunque rectæ $MN$, $mn$, Curvæ utrinque occurrentes, cujuſmodi rectæ vocari ſolent CHORDÆ & ORDINATÆ. Tum ex punctis $M$, $N$, $m$, $n$ ad tangentem producantur rectæ $MI$, $NK$; & $mi$, $nk$ Axi prius aſſumto parallelæ. Quia nunc intervalla $CK$, $Ck$ ad contrariam puncti $C$ partem cadunt,

negative capi debebunt. Hinc erit $CI - CK : MI = \epsilon : \zeta$ & $Ci - Ck : mi = \epsilon : \zeta$; ideoque $CI - CK : MI = Ci - Ck : mi$ seu $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$.

89. Quia positio Axis respectu Curvæ est arbitraria, rectæ $MI$, $NK$, $mi$, $nk$ pro lubitu duci poterunt, dummodo inter se fuerint parallelæ: eritque semper $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$. Quod si ergo rectæ parallelæ $MI$ & $NK$ ita ducantur ut fiat $CI = CK$; quod evenit si parallelæ $MI$ & $NK$ statuantur rectæ $CL$, quæ ex contactu $C$ ducta Ordinatam $MN$ in $L$ bisecat: tum, ob $CI - CK = 0$, fiet quoque $Ci - Ck = \frac{mi}{MI}(CI - CK) = 0$. Quare producta recta $CL$ in $l$, quia, ob $mi$ & $nk$ pariter ipsi $CL$ parallelas, est $ml = Ci$ & $nl = Ck$, erit $ml = nl$. Unde sequitur rectam $CLl$, quæ ex puncto contactus $C$ ducta unam Ordinatam $MN$ tangenti parallelam bisecat, eandem omnes Ordinatas $mn$ eidem tangenti parallelas bifariam secare.

90. Cum igitur recta $CLl$ omnes Ordinatas tangenti $ICK$ parallas in duas partes æquales secet, hæc Linea $CLl$ vocari solet DIAMETER *Lineæ secundi ordinis* seu *Sectionis conicæ*. Hinc innumerabiles in unaquaque Linea secundi Ordinis duci possunt Diametri, quia in singulis punctis Curvæ datur tangens. Ubicunque enim data fuerit tangens $ICK$, ducatur una quævis Ordinata $MN$ hinc tangenti parallela, qua in $L$ bisecta, erit recta $CL$ Diameter Lineæ secundi ordinis, omnes Ordinatas tangenti $IK$ parallelas bifariam secans.

91. Ex his etiam sequitur, si recta $Ll$ duas quasvis parallelas Ordinatas $MN$ & $mn$ bisecet, eandem esse omnes reliquas Ordinatas illis parallelas bisecturam: dabitur enim alicubi recta Curvam tangens $IK$ his Ordinatis parallela, ideoque dabitur Diameter. Hinc nova habetur methodus in data Linea secundi ordinis innumerabiles Diametros inveniendi; ducantur enim pro lubitu duæ Ordinatæ seu Chordæ $MN$ & $mn$ inter se parallelæ, quibus bisectis in $L$ & $l$, recta per hæc puncta ducta omnes reliquas Ordinatas illis parallelas pariter bisecabit, eritque

LIB. II. propterea Diameter. Atque ubi Diameter producta Curvam secat in $C$, per id recta $IK$ Ordinatis parallela ducta Curvam in puncto $C$ tanget.

92. Ad hanc proprietatem nos manuduxit consideratio summæ binarum radicum ipsius $y$ ex æquatione

$$yy + \frac{(\epsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \epsilon x + \alpha}{\zeta} = 0.$$

TAB. V. Fig. 19. Ex eadem vero æquatione constat fore productum ambarum radicum $PM.PN = \frac{\delta xx + \epsilon x + \gamma}{\zeta}$, quæ expressio $\frac{\delta xx + \epsilon x + \gamma}{\zeta}$ vel duos Factores habet simplices reales vel secus. Illud evenit si Axis Curvam in duobus punctis $E$ & $F$ secet, quia enim his in locis fit $y = 0$, erit $\frac{\delta xx + \epsilon x + \alpha}{\zeta} = 0$, hincque radices ipsius $x$ erunt $AE$ & $AF$, atque adeo Factores $(x - AE)(x - AF)$ ita ut fit $\frac{\delta xx + \epsilon x + \alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta}.PE.PF$ ob $x = AP$. Hanc ob rem ergo erit $PM.PN = \frac{\delta}{\zeta}.PE.PF$: seu rectangulum $PM.PN$ ad rectangulum $PE.PF$ constantem habebit rationem ut $\delta$ ad $\zeta$ ubicunque Applicata $PMN$ ducatur, dummodo sit angulus $NPF$ assumto, quo Applicatæ ad Axem inclinari ponuntur, æqualis. Erit ergo simili modo, si ducatur Applicata $mn$ ob $Ep$ & $pm$ negativas $pm.pn = \frac{\delta}{\zeta} pE.pF$.

TAB. V. Fig. 21. 93. Ducta ergo recta quacunque $PEF$ Lineam secundi ordinis secante in duobus punctis $E$, $F$, si ad eam parallelæ ducantur Ordinatæ quotcunque $NMP$, $npm$, erit semper $PM.PN : PE.PF = pm.pn : pE.pF$, utraque enim hujus proportionis ratio æquatur $\delta : \zeta$. Simili modo si, quia Axis positio est arbitraria, recta $PMN$ sumatur pro Axe, atque ipsi $PEF$ alia quæcunque parallela ducatur $eqf$, erit quoque $PM.$

$PN : PE.PF = qM.qN : qe : qf = pm.pn : pE.pF$. Ergo alternando $qe.qf : pE.pF = qM.qN : pm.pn$. Datis igitur duabus Ordinatis parallelis $ef$ & $EF$, si aliæ quæcunque duæ Ordinatæ inter se parallelæ $MN$ & $mn$ ducantur, illas secantes in punctis $P$, $p$, $q$, $r$, erunt hæ rationes omnes inter se æquales. $PM.PN : PE.PF = pm.pn : pE.pF = qM.qN : qe.qf = rm.rn : re.rf$. Quæ est altera proprietas generalis Linearum secundi ordinis. CAP. V.

94. Si igitur duo Curvæ puncta $M$ & $N$ coincidant, recta $PMN$ fiet Curvæ tangens in concursu illorum duorum punctorum, abibitque rectangulum $PM.PN$ in quadratum ipsius $PM$ vel $PN$, unde nova tangentium proprietas obtinebitur. Tangat nimirum recta $CPp$ Lineam secundi ordinis in puncto $C$, & ducantur lineæ quotvis $PMN$, $pmn$ inter se parallelæ, quæ ergo omnes cum tangente eundem angulum constituant. Ex proprietate igitur ante inventa erit. TAB. VI. Fig. 24.

$$PC^2 : PM.PN = pC^2 : pm.pn,$$

seu quæcunque Ordinata $MN$ ad tangentem sub angulo dato ducatur, erit semper quadratum rectæ $CP$ ad rectangulum $PM \times PN$ in ratione constante.

95. Indidem etiam sequitur, si Lineæ secundi ordinis ducatur Diameter quæcunque $CD$, omnes Ordinatas $MN$, $mn$ inter se parallelas bifariam secans, atque ipsa Diameter Curvæ occurrat in punctis duobus $C$ & $D$, fore TAB. V. Fig. 20.

$$CL.LD : LM.LN = Cl.lD : lm.ln.$$

Cum autem sit $LM = LN$, & $lm = ln$, erit $LM^2 : lm^2 = CL.LD : Cl.lD$, seu perpetuo erit quadratum semiordinatæ $LM$ ad rectangulum $CL.LD$ in ratione constante. Hinc sumta Diametro $CD$ pro Axe, & semiordinatis $LM$ pro Applicatis, reperietur æquatio pro Lineis secundi ordinis. Sit enim Diameter $CD = a$, Abscissa $CL = x$ & Applicata $LM = y$, ob $LD = a - x$ erit, $y^2$ ad $ax - xx$ in ratione

 constante, quæ sit ut $h$ ad $k$, unde orietur ista pro Lineis secundi ordinis æquatio $yy = \frac{h}{k}(ax - xx)$.

Tab. V. Fig. 22. 96. Ex ambabus autem jam inventis Linearum secundi Ordinis proprietatibus conjunctim aliæ erui poterunt proprietates. Dentur in Linea secundi ordinis duæ Ordinatæ inter se parallelæ $AB$ & $CD$, & compleatur quadrilaterum $ACDB$, quod si jam per punctum quodcunque Curvæ $M$ ducatur Ordinata $MN$ illis $AB$ & $CD$ parallela secans rectas $AC$ & $BD$ in punctis $P$ & $Q$, erunt partes $PM$ & $QN$ inter se æquales. Nam recta, quæ bisecat Ordinatas duas $AB$ & $CD$ inter se parallelas, bisecabit quoque Ordinatam $MN$: at, per Geometriam elementarem, eadem recta bisecans latera $AB$ & $CD$ quoque bisecabit portionem $PQ$. Cum igitur lineæ $MN$ & $PQ$ in eodem puncto bisecentur, necesse est ut sit $MP = NQ$ & $MQ = NP$. Dato ergo, præter quatuor Lineæ secundi ordinis puncta $A$, $B$, $C$, & $D$, quinto $M$ ex eo reperietur sextum $N$, sumto $NQ = MP$.

97. Cum jam sit $MQ.QN$ ad $BQ.DQ$ in ratione constante, ob $QN = MP$ erit quoque $MP.MQ$ ad $BQ.DQ$ in eadem ratione constante. Scilicet, si aliud quodcunque Curvæ punctum, uti $c$, sumatur, & per id recta $GcH$ ipsis $AB$, & $CD$ parallela ducatur donec lateribus $AC$ $BD$ occurrat in punctis $G$ & $H$, erit quoque $cG.cH$ ad $BH.DH$ in eadem ratione constante, ideoque $cG.cH : BH.DH = MP.MQ : BQ.DQ$. Quod si autem per $M$ basi $BD$ parallelæ ducatur $RMS$ Ordinatis parallelis $AB$, $CD$ occurrens in $R$ & $S$, erit, ob $BQ = MR$ & $DQ = MS$, hæc quoque ratio $MP.MQ : MR.MS$ constans. Si igitur per quodvis Curvæ punctum $M$ duæ ducantur rectæ, altera $MPQ$ lateribus oppositis $AB$, $CD$ parallela, altera vero $RMS$ basi $BD$ parallela, intersectiones $P$, $Q$, $R$, & $S$ ita erunt comparatæ, ut sit $MP.MQ$ ad $MR.MS$ in ratione constante.

98. Si loco Ordinatæ $CD$, quæ posita est ipsi $AB$ parallela, ex puncto $D$ alia quæcunque $Dc$ in ejus locum subs-

tituatur, & Chorda $Ac$ jungatur: ita ut nunc rectæ $MQ$ & $RMS$, ductæ, ut ante, per $M$ lateribus $AB$ & $BD$ parallelæ, latera quadrilateri $ABDc$ secent in punctis $p$, $Q$, $R$ & $s$; similis proprietas locum habebit. Cum enim sit $MP.\ MQ : BQ \times DQ = cG.\ cH : BH.\ DH$ seu $MP.\ MQ : MR.\ MS = cG.\ cH : BH.\ DH$, ob rectam $RS$ ipsi $BD$ parallelam & æqualem. Triangula vero similia $APp$, $AGc$ & $DSs$, $cHD$, præbent has proportiones $Pp : AP = Gc : AG$; seu, ob $AP : AG = BQ : BH$, hanc $Pp : BQ = Gc : BH$ : altera similitudo dat hanc $DS$, $(MQ) : Ss = cH : DH$, quibus conjunctis fit CAP. V.

$$MQ.\ Pp : MR.\ Ss = cG.\ cH : BH.\ DH, \text{ ob } BQ = MR.$$

Hæc proportio cum superiori collata præbet

$$MP.\ MQ : MR.\ MS = Pp.\ MQ : MR.\ Ss,$$

unde addendo antecedentes & consequentes fit

$$MP.\ MQ : MR.\ MS = Mp.\ MQ : MR.\ Ms,$$

ubicunque ergo sumantur puncta $c$ & $M$ in Curva, erit semper ratio $Mp.\ MQ$ ad $MR.\ Ms$ eadem, dummodo rectæ $MQ$ & $Rs$ per $M$ ducantur Chordis $AB$ & $BD$ parallelæ. Ex superiore vero proportione sequitur fore $MP : MS = Mp : Ms$. Cum igitur, variato puncto $c$, tantum puncta $p$ & $s$ mutentur, erit $Mp$ ad $Ms$ in data ratione, utcunque punctum $c$ varietur, dum punctum $M$ fixum servatur.

99. Quod si quatuor quæcunque puncta $A, B, C, D$ in Linea secundi ordinis fuerint data, eaque jungantur rectis, ut habeatur trapezium inscriptum $ABDC$, proprietas Sectionum conicarum latissime patens ex præcedenti deducitur. Scilicet, si ex Curvæ puncto quovis $M$ ad singula trapezii latera sub datis angulis ducantur rectæ $MP$, $MQ$, $MR$ & $MS$, erunt semper rectangula binarum harum linearum ad opposita latera ductarum inter se in data ratione, nempe erit $MP.\ MQ$ TAB VI. Fig. 23.

TAB. II. ad $MR.MS$ in data ratione eadem, ubicunque punctum $M$ in Curva capiatur, dummodo anguli ad $P$, $Q$, $R$ & $S$ iidem serventur. Ad hoc ostendendum ducantur per $M$ duæ rectæ $Mq$ & $rs$, illa lateri $AB$ hæc lateri $BD$ parallela, ac notentur intersectionum cum lateribus trapezii puncta $p$, $q$, $r$ & $s$: eritque per prius inventum $Mp.Mq$ ad $Mr.Ms$ in data ratione. Propter omnes autem angulos datos datæ erunt rationes $MP:Mp$, $MQ:Mq$, $MR:Mr$, & $MS:Ms$, ex quibus sequitur fore $MP.MQ$ ad $MR.MS$ in data quoque ratione.

TAB. VI. Fig. 24. 100. Quoniam supra vidimus, si Ordinatæ parallelæ $MN$, $mn$ producantur, quoad tangenti cuipiam $CPp$ occurrant in $P$ & $p$, fore $PM.PN:CP^2=pm.pn:Cp^2$. Quare, si puncta $L$ & $l$ notentur, ut sit $PL$ media proportionalis inter $PM$ & $PN$, pariterque $pl$ media proportionalis inter $pm$ & $pn$, erit $PL^2:CP^2=pl^2:Cp^2$; ideoque erit $PL:CP=pl:Cp$, unde patet omnia puncta $L$, $l$ in Linea recta per punctum contactus $C$ transeunte esse sita. Quare, si una Applicata $PMN$ ita secetur in $L$ ut sit $PL^2=PM.PN$, recta $CLD$ per puncta $C$ & $L$ ducta omnes reliquas Applicatas $pmn$ ita quoque secabit in $l$ ut sit $pl$ media proportionalis inter $pm$ & $pn$. Vel, si duæ Applicatæ $PN$ & $pn$ ita in punctis $L$ & $l$ secentur, ut sit $PL^2=PM.PN$ & $pl^2=pm.pn$ recta per $L$ & $l$ producta per punctum contactus $C$ transibit, atque omnes reliquas Applicatas illis parallelas in eadem ratione secabit.

TAB. VI. Fig. 25. 101. His Linearum secundi ordinis proprietatibus, quæ ex forma æquationis immediate consequuntur, expositis; progrediamur ad alias magis reconditas investigandas. Sit igitur proposita æquatio pro his Lineis secundi ordinis generalis

$$yy+\frac{(\epsilon x+\gamma)}{\zeta}y+\frac{\delta xx+\beta x+\alpha}{\zeta}=0,$$

ex qua cum cuivis Abscissæ $AP=x$, duplex Applicata $y$ nempe

nempe $PM$ & $PN$ respondeat, positio Diametri omnes Ordinatas $MN$ bifariam secantis definiri potest. Sit enim $IG$ ista Diameter, quæ Ordinatam $MN$ secabit in puncto medio $L$, quod ergo punctum est in Diametro. Ponatur $PL = z$; &, cum sit $z = \frac{1}{2} PM + \frac{1}{2} PN$, erit $z = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{2\zeta}$, seu $2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0$, quæ est æquatio positionem Diametri $IG$ præbens.

102. Hinc porro longitudo Diametri $IG$ definiri poterit, quæ dat loca bina in Curva, ubi puncta $M$ & $N$ coincidunt, seu ubi fit $PM = PN$. Ex æquatione vero dantur $PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta}$ & $PM.PN = \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta}$, unde fit $(PM - PN)^2 = (PM + PN)^2 - 4PM.PN = \frac{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)xx + 2(\varepsilon\gamma - 2\beta\zeta)x + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{\zeta\zeta} = 0$, seu $xx - \frac{2(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta} x + \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta} = 0$; cujus æquationis propterea radices sunt $AK$ & $AH$ ita ut sit $AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\varepsilon\gamma}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ & $AK.AH = \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$: hinc fit $(AH - AK)^2 = KH^2 = \frac{4(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 - 4(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)^2}$. At est $IG^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon + 4\zeta\zeta}{4\zeta\zeta} KH^2$, si quidem Applicatæ Axem normales statuantur.

103: Sint istæ Applicatæ, quas hic sumus contemplati, normales ad Axem $AH$; nunc vero hinc quæramus æquationem pro Applicatis obliquangulis. Ducatur ergo ex quovis Curvæ puncto $M$ ad Axem Applicata obliquangula $Mp$ faciens cum Axe angulum $MpH$, cujus Sinus sit $= \mu$, & Cosinus $= \nu$. Sit nova Abscissa $Ap = t$, Applicata $pM = u$, erit $\frac{y}{u} = \mu$ & $\frac{Pp}{u} = \nu$, unde erit $y = \mu u$ & $x = t + \nu u$, qui valores

 in æquatione inter $x$ & $y$, quæ erat $o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \epsilon xy + \zeta yy$, substituti præbent

$$\begin{aligned} o = \alpha + \beta t + \nu\beta u + \delta tt &+ 2\nu\delta tu + \nu\nu\delta uu \\ + \mu\gamma u \qquad &+ \mu\epsilon tu + \mu\nu\epsilon uu \\ &\qquad\qquad + \mu\mu\zeta uu. \end{aligned}$$

seu

$$uu + \frac{((\mu\epsilon + 2\nu\delta)t + \mu\gamma + \nu\beta)u + \delta tt + \beta t + \alpha}{\mu\mu\zeta + \mu\nu\epsilon + \nu\nu\delta} = o.$$

104. Hic ergo iterum quævis Applicata duplicem habebit valorem, nempe $pM$ & $pn$: quare ordinatarum $Mn$ Diameter $ilg$ pari modo ut ante definietur. Scilicet, bisecta Ordinata $Mn$ in $l$ erit $l$, punctum in Diametro. Ponatur ergo $pl = v$, erit $v = \frac{pM + pn}{2} = \frac{-(\mu\epsilon + 2\nu\delta)t - \mu\gamma - \nu\beta}{2(\mu\mu\zeta + \mu\nu\epsilon + \nu\nu\delta)}$. Demittatur ex $l$ in Axem $AH$ perpendiculum $lq$, ac ponatur $Aq = p$, $ql = q$, erit $\mu = \frac{q}{v}$ & $\nu = \frac{pq}{v} = \frac{p - t}{v}$, unde fit $v = \frac{q}{\mu}$, & $t = p - \nu v = p - \frac{\nu q}{\mu}$. Substituantur hi valores in æquatione inter $t$ & $v$ ante inventa, & prodibit

$$\frac{q}{\mu} = \frac{-\mu\epsilon p - 2\nu\delta p + \nu\epsilon q + 2\nu\nu\delta q : \mu - \mu\gamma - \nu\beta}{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\epsilon + 2\nu\nu\delta},$$

seu

$$(2\mu\mu\zeta + \mu\nu\epsilon)q + (\mu\mu\epsilon + 2\mu\nu\delta)p + \mu\mu\gamma + \mu\nu\beta = o,$$

seu

$$(2\mu\zeta + \nu\epsilon)q + (\mu\epsilon + 2\nu\delta)p + \gamma\mu + \nu\beta = o,$$

qua æquatione positio Diametri $ig$ definitur.

105. Prior Diameter $IG$, cujus positio per hanc æquationem determinabatur $2\zeta z + \epsilon x + \gamma = o$, producta cum Axe concurrat in $O$, eritque $AO = \frac{-\gamma}{\epsilon}$; hinc fit $PO = \frac{-\gamma}{\epsilon} - x$, & anguli $LOP$ tangens erit $= \frac{z}{PO} = \frac{-\epsilon z}{\epsilon x + \gamma}$

$= \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, & tangens anguli $MLG$, ſub quo Diameter $IG$ Ordinatas $MN$ biſecat erit $= \frac{2\zeta}{\varepsilon}$. Altera vero Diameter $ig$ producta Axi occurrat in $o$, eritque $Ao = \frac{-\mu\gamma - \nu\beta}{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}$, & anguli $Aol$ tangens erit $= \frac{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}{2\mu\zeta + \nu\varepsilon}$. Cum jam anguli $AOL$ tangens ſit $= \frac{\varepsilon}{2\zeta}$, ambæ Diametri ſe mutuo interſecabunt in puncto quodam $C$, facientque angulum $OCo = Aol - AOL$, cujus propterea tangens eſt $= \frac{4\nu\delta\zeta - \nu\varepsilon\varepsilon}{4\mu\zeta\zeta + 2\nu\delta\varepsilon + 2\nu\varepsilon\zeta + \mu\varepsilon\varepsilon}$. Angulus autem, ſub quo hæc altera Diameter ſuas Ordinatas biſecat, eſt $Mlo = 180^\circ - lpo - Aol$: hujus propterea tangens eſt $= \frac{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu\nu\delta}{\mu\mu\varepsilon + 2\mu\nu\delta - 2\mu\nu\zeta - \nu\nu\varepsilon}$.

106. Inquiramus autem in punctum $C$, ubi hæ duæ Diametri ſe mutuo interſecant: ex quo ad Axem perpendiculum $CD$ demittatur, ac vocetur $AD = g$, $CD = h$; eritque primo, quod $C$ in Diametro $IG$ extat, $2\zeta h + \varepsilon g + \gamma = 0$. Deinde, quia $C$ quoque in Diametro $ig$ reperitur, erit

$$(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)h + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)g + \mu\gamma + \nu\beta = 0.$$

Subtrahatur hinc prior æquatio per $\mu$ multiplicata, ac remanebit

$$\nu\varepsilon h + 2\nu\delta g + \nu\beta = 0, \text{ ſeu } \varepsilon h + 2\delta g + \beta = 0.$$

Ex his fit $h = \frac{-\varepsilon g - \gamma}{2\zeta} = \frac{-2\delta g - \beta}{\varepsilon}$, ideoque $(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)g = 2\beta\zeta - \gamma\varepsilon$, & $g = \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ & $h = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$. In quibus determinationibus cum non inſint quantitates $\mu$ & $\nu$, a quibus obliquitas Applicatarum $pMn$ pendet, manifeſtum eſt punctum $C$ idem manere, utcunque obliquitas varietur.

LIB. II. 107. Omnes ergo Diametri $IG$ & $ig$ se mutuo in eodem puncto $C$ decussant : quod ergo si semel fuerit inventum , omnes Diametri per id transibunt ; ac vicissim omnes rectæ per id ductæ erunt Diametri , quæ omnes Ordinatas sub certo quodam angulo ductas bisecent. Cum igitur hoc punctum in quavis Linea secundi ordinis sit unicum , in eoque omnes Diametri se mutuo decussent , hoc punctum vocari solet CENTRUM Sectionis conicæ. Quod ergo ex æquatione inter $x$ & $y$ proposita

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy$$

ita invenitur , ut sumta $AD = \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$, capiatur $CD = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$.

108. Supra autem invenimus esse $AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ : sunt autem $IK$ & $GH$ perpendicula ex terminis Diametri $IG$ in Axem demissa ; unde perspicitur esse $AD = \frac{AK + AH}{2}$, atque ideo punctum $D$ erit medium inter puncta $K$ & $H$. Quam ob rem Centrum quoque $C$ in medio Diametri $IG$ erit situm ; quod cum de quavis alia Diametro æque valeat , consequens est non solum omnes Diametros se mutuo in eodem puncto $C$ decussare, sed etiam se invicem bifariam secare.

TAB. VII. Fig. 26. 109. Sumamus nunc quamcunque Diametrum $AI$ pro Axe ad quem Ordinatæ $MN$ applicatæ sint sub angulo $APM = q$, cujus Sinus $= m$ & Cosinus $= n$. Ponatur Abscissa $AP = x$ & Applicata $PM = y$, cujus cum duo sint valores æquales alter alterius negativus eorumque adeo summa $= 0$, æquatio generalis pro Linea secundi Ordinis abibit in hanc formam $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ ; quæ , si ponatur $y = 0$ , dabit puncta $G$ & $I$ in Axe , ubi is a Curva trajicitur ; æquationis sci-

licet $xx + \frac{\mathfrak{C}}{\gamma}x + \frac{\alpha}{\gamma}$ o radices erunt $x = AG$ & $x = AI$; ideoque habebitur $AG + AI = \frac{-\mathfrak{C}}{\gamma}$, & $AG.\,AI = \frac{\alpha}{\gamma}$. Cum igitur Centrum $C$ in medio Diametri $GI$ sit positum, facile reperietur Centrum Sectionis conicæ $C$. Erit enim $AC = \frac{AG + AI}{2} = \frac{-\mathfrak{C}}{2\gamma}$.

110. Cognito jam Centro Sectionis conicæ $C$, in Axe $AI$, id convenientissime pro initio Abscissarum accipietur. Statuatur ergo $CP = t$, quia manet $PM = y$, ob $x = AC - CP = \frac{-\mathfrak{C}}{2\gamma} - t$, prodibit hæc æquatio inter Coordinatas $t$ & $y$

$$yy = \alpha - \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}}{2\gamma} + \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}}{4\gamma} - \mathfrak{C}t + \mathfrak{C}t + \gamma tt$$

seu

$$yy = \alpha - \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}}{4\gamma} + \gamma tt.$$

Posito igitur $x$ loco $t$, habebitur æquatio generalis pro Lineis secundi ordinis, sumta Diametro quacunque pro Axe, & Centro pro Abscissarum initio, quæ, mutata constantium forma, erit $yy = \alpha - \mathfrak{C}xx$. Posito ergo $y = 0$ fiet $CG = CI = \sqrt{\frac{\alpha}{\mathfrak{C}}}$, ideoque tota Diameter $GI$ erit $= 2\sqrt{\frac{\alpha}{\mathfrak{C}}}$.

111. Ponatur $x = 0$, ac reperietur Ordinata per Centrum transiens $EF$: fiet scilicet $CE = CF = \sqrt{\alpha}$; ideoque tota Ordinata $EF = 2\sqrt{\alpha}$; quæ, quia per Centrum transit, pariter erit Diamerer, cum illa $GI$ angulum faciens $ECG = q$. Hæc autem altera Diameter $EF$ bisecabit omnes Ordinatas priori Diametro $GI$ parallelas; facta enim Abscissa $AP$ negativa, Applicata $aC$ versus $I$ cadens manebit priori $PM$ æqualis; &, cum eidem sit parallela, puncta ambo $M$ juncta dabunt Lineam Diametro $GI$ parallelam, ideoque bisecandam

LIB. II. a Diametro $EF$. Hæ igitur ambæ Diametri $GI$ & $EF$ ita inter se sunt affectæ, ut altera bisecet omnes Ordinatas alteri parallelas, quam ob reciprocam proprietatem hæ duæ Diametri inter se CONJUGATÆ appellantur. Si igitur in terminis $G$ & $I$ Diametri $GI$ ducantur rectæ alteri Diametro $EF$ parallelæ, tangent hæ Lineam curvam, similique modo si per $E$ & $F$ ducantur rectæ Diametro $GI$ parallelæ hæ tangent Curvam in punctis $E$ & $F$.

112. Ducatur nunc Applicata quævis $MQ$ obliquangula; sitque angulus $AQM = \varphi$, ejus Sinus $= \mu$ & Cos. $= \nu$. Ponatur Abscissa $CQ = t$, & Applicata $MQ = u$, eritque in triangulo $PMQ$ ob ang. $PMQ = \varphi - q$ ac propterea *fin.* $PMQ = \mu n - \nu m$, $y : u : PQ = \mu : m : \mu n - \nu m$ hincque $y = \frac{\mu u}{m}$ & $PQ = \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$, unde $x = t - PQ = t - \frac{(\mu n - \nu m)u}{m}$. Substituantur hi valores in æquatione superiori $yy = \alpha - \mathfrak{C}xx$, seu $yy + \mathfrak{C}xx - \alpha = 0$, ac orietur

$$(\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2)uu - 2\mathfrak{C}m(\mu n - \nu m)tu + \mathfrak{C}m^2tt - \alpha m^2 = 0,$$

ex qua Applicata $u$ duos obtinet valores $QM$ & $-Qn$ eritque $QM - Qn = \frac{2\mathfrak{C}m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu \mu)^2}$. Bisecetur Ordinata $Mn$ in $p$, eritque recta $Cpg$ nova Diameter secans omnes Ordinatas ipsi $Mn$ parallelas bifariam, eritque $Qp = \frac{\mathfrak{C}m(\mu n - \nu m)t}{\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2}$.

113. Obtinetur autem hinc anguli $GCg$ tangens $= \frac{\mu . Qp}{CQ + \nu . Qp}$, vel *tang.* $GCg = \frac{\mathfrak{C}m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\mathfrak{C}(\mu n - \nu m)}$ & *tang.* $Mpg = \frac{\mu . CQ}{pQ + \nu . CQ} = \frac{\mu\mu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)^2}{\mu\nu + \mathfrak{C}(\mu n - \nu m)(\nu m + \mu m)}$, qui est angulus sub quo novæ Ordinatæ $Mn$ a Diametro $gi$ bisecantur. Porro vero erit $Cp^2 = CQ^2 + Qp^2 + 2\nu . CQ \times$

$Qp = \frac{\mu^4 + 2\beta\mu^3 n(\mu n - \nu m) + \beta\beta\mu\mu(\mu n - \nu m)^2}{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)^2} tt$ : ideoque
$Cp = \frac{\mu t \sqrt{(\mu^4 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}$.
Ponatur $Cp = r$ & $pM = s$, eritque $t =$
$\frac{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2) r}{\mu\sqrt{(\mu^4 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}$ & $u = s +$
$Qp = s + \frac{\beta m(\mu n - \nu m) r}{\mu\sqrt{(\mu^4 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}$,

qui valores porro dant

$$y = \frac{\mu s}{m} + \frac{\beta(\mu n - \nu m) r}{\sqrt{(\ldots\ldots\ldots)}}$$
$$x = -\frac{(\mu n - \nu m) s}{m} + \frac{\mu r}{\sqrt{(\ldots\ldots\ldots)}},$$

unde ex æquatione $yy + \beta xx - \alpha$ orietur
$\frac{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2) ss}{mm} + \frac{\beta(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2) rr}{\mu\mu + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2} -$
$\alpha = 0$.

114. Vocemus jam semidiametrum $CG = f$ & semiconjugatam $CE = CF = g$, eritque $f = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ & $g = \sqrt{\alpha}$, seu $\alpha = gg$ & $\beta = \frac{gg}{ff}$ : unde fit $yy + \frac{ggxx}{ff} = gg$. Ponamus porro angulum $GCg = p$, erit $tang.\ p = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\beta(\mu n - \nu m)}$. At, ob angulum $GCE = q$, si ponatur angulus $ECe = \varpi$, erit $AQM = \varphi = q + \varpi$; ideoque $\mu = fin.(q + \pi)$; $\nu = cof.(q + \varpi)$, $m = fin.\ q$ & $n = cof.\ q$. Ergo $tang.\ p = \frac{\beta.\ fin.\ q.\ fin.\ \varpi}{fin.(q + \varpi) + \beta.\ cof.\ q.\ fin.\ \pi} =$
$\frac{\beta.\ tang.\ q.\ tang.\ \varpi}{tang.\ q + tang.\ \varpi + \beta\ tang.\ \varpi}$, &
$fin.\ p = \frac{\beta.\ fin.\ q.\ fin.\ \pi}{\sqrt{(\mu\mu + 2b\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}$?

atque

 $\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2 = (\text{sin.}(q + \varpi)^2) + \beta(\text{sin.}\,\varpi)^2$, quibus valoribus in ſubſidium vocatis prodit iſta æquatio inter $r$ & $s$ $\frac{((\text{sin.}\,\overline{q+\pi})^2 + \beta(\text{sin.}\,\pi)^2)ss}{(\text{sin.}\,q)^2} + \frac{\beta((\text{sin.}\,\overline{q+\pi})^2 + \beta(\text{sin.}\,\pi)^2)rr}{\beta\beta(\text{sin.}\,q)^2(\text{sin.}\,\pi)^2}$ $(\text{sin.}\,p)^2 - \alpha = 0$. At eſt $\beta = \frac{\text{tang.}\,p.\,\text{sin.}\,(q+\pi)}{(\text{sin.}\,q - \text{cos.}\,q.\,\text{tang.}\,p).\,\text{sin.}\,\pi} = \frac{\text{tang.}\,p.\,(\text{tang.}\,q + \text{tang.}\,\pi)}{\text{tang.}\,\pi\,(\text{tang.}\,q - \text{tang.}\,p)} = \frac{gg}{ff} = \frac{\text{cot.}\,\pi.\,\text{tang.}\,q + 1}{\text{cot.}\,p.\,\text{tang.}\,q - 1}$, ſeu $\text{tang.}\,q = \frac{ff + gg}{gg\,\text{cot.}\,p - ff.\,\text{cot.}\,\pi}$, unde plurima conſectaria deduci poſſunt. Erit vero $\frac{gg}{ff} = \frac{\text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,(q+\pi)}{\text{sin.}\,\pi\,\text{sin.}\,(q-p)}$.

115. Sit ſemidiameter $Cg = a$, ejuſque ſemidiameter conjugata $C = b$; erit ex æquatione ante inventa,

$$a = \frac{\text{sin.}\,q.\,\text{sin.}\,\pi\,\sqrt{\alpha\beta}}{\text{sin.}\,p\,\sqrt{((\text{sin.}\,\overline{q+\pi})^2 + \beta(\text{sin.}\,\pi)^2)}} = \frac{gg.\,\text{sin.}\,q.\,\text{sin.}\,\pi}{\text{sin.}\,p\,\sqrt{(ff(\text{sin.}\,(q+\pi))^2 + gg(\text{sin.}\,\pi)^2)}},$$ & $$b = \frac{fg.\,\text{sin.}\,q}{\sqrt{(ff(\text{sin.}\,(q+\pi)^2) + gg(\text{sin.}\,\pi)^2)}},$$ hinc erit $a : b = g.\,\text{sin.}\,\pi : f.\,\text{sin.}\,p$. Eſt vero porro $(\text{sin.}\,(q+\pi))^2 + \frac{gg}{ff}(\text{sin.}\,\pi)^2 = \frac{\text{sin.}\,(q+\pi)}{\text{sin.}\,(q-p)}(\text{sin.}(q-p).\,\text{sin.}(q+\pi) + \text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,\pi)$ $= \frac{\text{sin.}\,q.\,(\text{sin.}\,(q+\pi).\,\text{sin.}\,(q+\pi-p)}{\text{sin.}\,(q-p)}$, unde fiet $a = \frac{gg.\,\text{sin.}\,\pi}{f.\,\text{sin.}\,p}\sqrt{\frac{\text{sin.}\,q.\,\text{sin.}\,(q-p)}{\text{sin.}\,(q+\pi)\,\text{sin.}\,(q+\pi-p)}}$; ſeu, ob $\frac{gg}{ff} = \frac{\text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,(q+\pi)}{\text{sin.}\,\pi.\,\text{sin.}\,(q-p)}$, erit $a = f\sqrt{\frac{\text{sin.}\,q.\,\text{sin.}\,(q+\pi)}{\text{sin.}\,(q-p).\,\text{sin.}\,(q+\pi-p)}}$ & $b = g\sqrt{\frac{\text{sin.}\,q.\,\text{sin.}\,(q-p)}{\text{sin.}\,(q+\pi).\,\text{sin.}\,(q+\pi-p)}}$, ergo erit $a : b = f.\,\text{sin.}\,(q+\pi) : g.\,\text{sin.}\,(q-p)$ & $ab = \frac{fg.\,\text{sin.}\,q}{\text{sin.}\,(q+\pi-p)}$.

116. Si

116. Si ergo in Sectione conica binæ Diametri conjugatæ habeantur, $GI$, $EF$ & $gi$, $ef$, erit primo

$$Cg : Ce = CG.\,fin.\,ECe : CG.\,fin.\,GCg.$$

Ergo

$$fin.\,GCg : fin.\,ECe = CE.\,Ce : CG.\,Cg.$$

& fi chordæ $Ee$ & $Gg$ ducantur, fiet hinc Triangulum $CGg =$ Triangulo $CEe$. Deinde erit $Cg : Ce = CG.\,fin.\,GCe : CE.\,fin.\,gCE$, feu $Ce.\,CG.\,fin.\,GCe = CE.\,Cg.\,fin.\,gCE$: unde, fi ducantur chordæ $Ge$ & $gE$, erunt Triangula $GCe$ & $gCE$ inter fe æqualia, feu e regione erit Triangulum $ICf =$ Triangulo $iCF$. Ultima vero æquatio $ab.\,fin.\,(q + \pi - p) = fg.\,fin.\,q$ dabit $Cg.\,Ce.\,fin.\,gCe = CG.\,CE.\,fin.\,GCE$. Quod fi ergo ducantur chordæ $EG$ & $eg$, vel e regione $FI$ & $fi$ erunt pariter Triangula $ICF$ & $iCf$ æqualia: unde fequitur omnia parallelogramma, quæ circa binas Diametros conjugatas defcribuntur, inter fe effe æqualia.

117. Habentur ergo tria triangulorum paria inter fe æqualia, nempe,

I. Triangulum $FCf$ æquale Triangulo $ICi$.
II. Triangulum $fCI$ æquale Triangulo $FCi$.
III. Triangulum $FCI$ æquale Triangulo $fCi$.

Unde fequitur fore trapezia $FfCI$ & $iICf$ inter fe æqualia; a quibus fi auferatur idem triangulum $fCI$, erit Triangulum $FIf =$ Triangulo $Ifi$: quæ cum fuper eadem bafi $fI$ fint conftituta, neceffe eft ut fit chorda $Fi$ chordæ $fI$ parallela. Porro itaque erit Triangulum $FIi =$ Triangulo $ifF$, ad quæ fi addantur triangula æqualia $FCI$ & $fCi$, erunt quoque hæc trapezia inter fe æqualia $FCIi = iCfF$.

118. Hinc etiam deducitur methodus ad quodvis Lineæ fecundi ordinis punctum $M$ tangentem $MT$ ducendi. Sumta enim Diametro $GI$ pro Axe, cui conjugatæ femiffis fit $EC$, ex puncto $M$ ipfi $CE$ parallela ad Axem ducatur $MP$, quæ erit femiordinata, ac $PN = PM$. Ducta $CM$, quæ erit Semidiameter, quæratur ejus Semidiameter conjugata $CK$, cui tangens $MT$ quæfita erit parallela. Sit angulus $GCE = q$; TAB. VII. Fig. 27.

Lib. II. $GCM = p$ & $ECK = \varpi$; erit, uti vidimus, $\frac{EC^2}{GC^2} = \frac{\sin. p . \sin. (q+\pi)}{\sin. \pi . \sin. (q-p)}$ & $MC = CG \surd \frac{\sin. q . \sin. (q+\pi)}{\sin. (q-p) . \sin. (q+\pi-q)}$. At in Triangulo $CMP$ eſt $MC^2 = CP^2 + MP^2 + 2 PM \times CP . \cos. q$. & $MP : MC = \sin. p : \sin. q$. & $MP : CP = \sin. p : \sin. (q-p)$. Deinde in Triangulo $CMT$, ob angulos datos, erit $CM : CT : MT = \sin. (q+\pi) : \sin. (q+\pi-p) : \sin. p$. Hinc, angulis eliminatis, erit $MC = CG \surd \frac{MC . CM}{CP . CT}$ ſeu $CG^2 = CP . CT$. Hinc erit $CP : CG = CG : CT$, unde poſitio tangentis expedite invenitur. Erit autem ex hac proportione *dividendo* $CP : PG = CG : TG$; & ob $CG = CI$ *componendo* $CP : IP = CG : TI$.

119. Cum ſit $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\sin. p . \sin. (q+\varpi)}{\sin. \varpi . \sin. (q-p)}$ & $\frac{CK^2}{CM^2} = \frac{\sin. p . \sin. (q-p)}{\sin. p . \sin. (q+p)}$, itemque $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\sin. q . \sin. (q+\pi)}{\sin. (q-p) \sin. (q+\pi-p)}$ & $\frac{CK^2}{CE} = \frac{\sin. q . \sin. (q-p)}{\sin. (q+\varpi) . \sin. (q+\pi-p)}$, erit $\frac{CE^2 + CG^2}{CG^2} = \frac{\sin. p . \sin. (q+\varpi) + \sin. \varpi . \sin. (q-p)}{\sin. \pi . \sin. (q-p)}$, & $\frac{CK^2 + CM^2}{CM^2} = \frac{\sin. p . \sin. (q-p) + \sin. \pi . \sin. (q+\varpi)}{\sin \varpi . \sin. (q+\pi)}$. At eſt $\sin. A . \sin. B = \frac{1}{2} \cos. (A=B) - \frac{1}{2} \cos. (A+B)$ & viciſſim $\frac{1}{2} \cos. A - \frac{1}{2} \cos. B = \sin. \frac{A+B}{2} . \sin. \frac{B-A}{2}$. Unde erit $\sin. p . \sin. (q+\pi) + \sin. \varpi . \sin. (q-p) = \frac{1}{2} \cos. (q+\varpi-p) - \frac{1}{2} \cos. (q+\pi+p) + \frac{1}{2} \cos. (q-\pi-p) - \frac{1}{2} \cos. (q+\pi-p) = \frac{1}{2} \cos. (q-\varpi-p) - \frac{1}{2} \cos. (q+\pi+p) = \sin. q . \sin. (p+\pi)$. Atque $\sin. p . \sin. (q-p) + \sin. \pi . \sin. (q+\varpi) = \frac{1}{2} \cos. (q-2p) - \frac{1}{2} \cos. q + \frac{1}{2} \cos. q -$

$\frac{1}{2}\,cof.(q+2\varpi)\frac{1}{2}=cof.(q-2p)-\frac{1}{2}\,cof.(q+2\varpi)=$ CAP. V.
$fin.(q+\varpi-p).fin.(p+\varpi)$.

Hinc ergo erit

$$\frac{CE^2+CG^2}{CG^2}=\frac{fin.q.fin.(p+\pi)}{fin.\pi.fin.(q-p)},$$

&

$$\frac{CK^2+CM^2}{CM^2}=\frac{fin.(q+\varpi-p).fin.(p+\pi)}{fin.\varpi.fin.(q+\pi)},$$

unde conficitur

$$\frac{CE^2+CG^2}{CK^2+CM^2}=\frac{CG^2}{CM^2}\cdot\frac{fin.q.fin.(q-\pi)}{fin.(q-p).fin.(q+\varpi-p)}=\frac{CG^2}{CM^2}\cdot\frac{CM^2}{CG^2}.$$

Quare erit $CE^2+CG^2=CK^2+CM^2$, ideoque in eadem Linea secundi ordinis summa quadratorum binarum Diametrorum conjugatarum semper est constans.

120. Cum igitur dentur duæ Semidiametri conjugatæ $CG$ & $CE$, pro Semidiametro $CM$ ad lubitum assumta statim reperitur ejus semidiameter conjugata $CK$ sumendo $CK=\sqrt{(CE^2+CG^2-CM^2)}$. Ex superioribus ergo Sectionum conicarum proprietatibus erit $TG.TI:TM^2=CG.CI:CK^2=CG^2:CK^2=CG^2:CE^2+CG^2-CM^2$; ideoque $TM^2=CG\sqrt{\frac{CE^2+CG^2-CM^2}{TG.TI}}$. Simili modo, si producta Ordinata $MN$, ducatur tangens $NT$, ambæ tangentes $MT$ & $NT$. Axi $TI$ in eodem puncto $T$ occurrent. Erit enim pro utraque $CP:CG=CG:CT$. At vero ducta recta $CN$ erit $TN=CG\sqrt{\frac{CE^2+CG^2-CM^2}{TG.TI}}$, adeoque $TM^2:TN^2=CE^2+CG^2-CM^2:CE^2+CG^2-CN^2$. Erit vero, ob bisectam $MN$ in $P$, $fin.CTM:fin.CTN=TN:TM=\sqrt{(CE^2+CG^2-CN^2)}:\sqrt{(CE^2+CG^2-CM^2)}$.

121. Ducantur in terminis Diametri $A$ & $B$ tangentes $AK$, $BL$, ac producatur tangens quæcunque $MT$ donec utramque tangentem secet in punctis $K$ & $L$. Sit $ECF$ Diameter conjugata, cui tum Applicatæ $MP$ tum tangentes $AK$ & $BL$, TAB. VII. Fig. 28.

 erunt parallelæ. Cum jam sit, ex natura tangentis, $CP : CA = CA : CT$ ob $CB = CA$ erit $CP : AP = CA : AT$, & $CP : BP = CA : BT$ ergo $CP : CA = CA : CT = AP : AT = BP : BT$, hincque $AT : BT = AP : BP$. At est $AT : BT = AK : BL$, ergo $AK : BL = AP : BP$. Deinde est $AT = \frac{CA.AP}{CP}$; $BT = \frac{CA.BP}{CP}$; & $PT = \frac{CA.AP}{CP} + AP = \frac{AP.BP}{CP}$ ergo $AT : PT = CA : BP = AK : PM$; similique modo erit $BT : PT = CA : AP = BL : PM$; unde fit $AK = \frac{CA.PM}{BP}$, $BL = \frac{CA.PM}{AP}$ & $AK.BL = \frac{CA^2.PM^2}{AP.BP}$. At est $AP.BP : PM^2 = AC^2 : CE^2$, unde consequitur ista egregia proprietas $AK.BL = CE^2$, ex qua porro fit $AK = CE\sqrt{\frac{AP}{BP}}$ & $BL = CE\sqrt{\frac{BP}{AP}}$, & $AP : BP = AK^2 : CE^2 = CE^2 : BL^2 = KM : ML$, atque $AK : BL = KM : LM$.

122. In quocunque ergo Curvæ puncto $M$ ducatur tangens occurrens tangentibus parallelis $AK$, $BL$ in $K$ & $L$, erit semper Semidiameter $CE$ tangentibus $AK$ & $BL$ parallela media proportionalis inter $AK$ & $BL$, seu erit $CE^2 = AK \times BL$. Quod si ergo in alio quocunque Curvæ puncto $m$ simili modo ducatur tangens $kml$, erit quoque $CE^2 = Ak.Bl$, ideoque $AK : Ak = Bl : BL$; hincque erit quoque $AK : Kk = Bl : Ll$. Secent tangentes $KL$ & $kl$ se mutuo in $o$, eritque $AK : Bl = Ak : BL = Kk : Ll = ko : lo = Ko : Lo$. Atque hæ sunt præcipuæ Sectionum conicarum proprietates, ex quibus Newtonus plurima insignia problemata resolvit in *Principiis*.

123. Cum sit $AK : Bl = Ko : Lo$, si tangens $LB$ producatur in $I$ ut sit $BI = AK$, erit $I$ punctum, ubi tangens ex altera parte ipsi $KL$ parallela hanc tangentem $LB$ esset sectura, quemadmodum $K$ in tangente $LK$ est punctum, ubi ea

a tangente $AK$ ipſi $BL$ parallela ſecatur. Tranſibit ergo recta $IK$ per Centrum $C$, ibique bifariam ſecabitur. Quodſi igitur duæ quæcunque tangentes $BL$, $ML$, modo præſcripto in $I$ & $K$ producantur, eæque a tertia tangente $lmo$ in punctis $l$ & $o$ ſecentur, erit $BI : Bl = Ko : Lo$, &, *componendo*, $IB : Il = Ko : KL$, ubicunque ergo tertia tangens $lmo$ ducatur erit perpetuo $IB . KL = Il Ko$. Ducta ergo quarta tangente quacunque $\lambda\mu\omega$ binas primum aſſumtas $IL$ & $KL$ ſecante in $\lambda$ & $\omega$, erit pariter $IB . KL = I\lambda . K\omega$, ideoque $Il . Ko = I\lambda . K\omega$ ſeu $Il : I\lambda = K\omega : Ko$. Ductis ergo rectis $l\omega$, $\lambda o$, in qua ratione hæ ſecabuntur, recta per ſectionum puncta tranſiens in eadem ratione ſecabit rectam $IK$. Quare ſi rectæ $l\omega$ & $\lambda o$ biſecentur, recta per biſectionis puncta tranſiens, biſecabit quoque rectam $IK$ ideoque per Centrum Sectionis conicæ $C$ tranſibit.

124. Quod recta $nmH$, quæ rectas $l\omega$, $\lambda o$ in data ratione ſecat; in eadem ratione ſecare debeat rectam $KI$, ſi quidem fuerit $Il : I\lambda = K\omega : Ko$, ſeu $I\lambda : \lambda l = Ko : o\omega$, hoc modo ex Geometria oſtendetur. Secet recta $mn$ utramque $l\omega$ & $\lambda o$ in ratione $m : n$, ſeu ſit $\lambda m : mo = ln : n\omega = m : n$, & ea producta trajiciat taugentes $IL$, & $KL$ in $Q$ & $R$; eritque $\mathit{ſin}.\, Q : \mathit{ſin}.\, R = \frac{ln}{Ql} : \frac{n\omega}{R\omega} = \frac{\lambda m}{Q\lambda} : \frac{mo}{Ro} = \frac{m}{Ql} : \frac{n}{R\omega}$, ergo $Ql : R\omega = Q\lambda : Ro$, & *dividendo* $l\lambda : o\omega = Q\lambda : Ro = Ql : R\omega$. Cum vero ſit $l\lambda : o\omega = I\lambda : Ko$, erit quoque $QI : RK = l\lambda : o\omega$, & $\mathit{ſin}.\, Q : \mathit{ſin}.\, R = \frac{m}{l\lambda} : \frac{n}{o\omega}$. At eſt quoque $\mathit{ſin}.\, Q : \mathit{ſin}.\, R = \frac{HI}{QI} : \frac{HK}{KR} = \frac{HI}{l\lambda} : \frac{HK}{o\omega}$, unde ſit $HI : HK = m : n = \lambda m : mo = ln : n\omega$. TAB. VIII. Fig. 30.

125. Datis duabus Semidiametris conjugatis $CG$. $CE$, quæ angulum obliquum $GCE = q$ inter ſe comprehendant, ſemper reperiri poterunt duæ aliæ Semidiametri conjugatæ $CM$ & $CK$ quæ angulum $MCK$ rectum conſtituant. Sit angulus $GCM = p$; & poſito $ECK = \pi$, erit $q + \pi - p = 90°$. TAB. VII. Fig. 27.

LIB. II. ideoque $\text{fin.}\,\varpi = \text{cof.}(q - p)$ & $\text{fin.}(q + \varpi) = \text{cof.}\,p$. Unde ( ex §. 119. ) erit $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\text{fin.}\,p.\,\text{cof.}\,p.}{\text{fin.}(q-p).\text{cof.}(q-p)} = \frac{\text{fin.}\,2p}{\text{fin.}\,2(q-p)} = \frac{\text{fin.}\,2n}{\text{fin.}\,2q.\,\text{cof.}\,2p - \text{cof.}\,2q.\,\text{fin.}\,2p}$; ergo $\frac{CG^2}{CE^2} = \text{fin.}\,2q.\,\text{cot.}\,2p - \text{cof.}\,2q.$ ex quo fit $\text{cot.}\,2GCM = \text{cot.}\,2q + \frac{CG^2}{CE^2.\,\text{fin.}\,2q}$, quæ æquatio semper præbet solutionem possibilem. Erit vero $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\text{fin.}\,q.\,\text{cof.}\,p}{\text{fin.}\,(q-p)}$ & $\frac{CG^2}{CM^2} = 1 - \frac{\text{tang.}\,p}{\text{tang.}\,q}$, unde $\text{tang.}\,p = \text{tang.}\,q - \frac{CG^2}{CM^2}.\,\text{tang.}\,q$. At cum sit $CM^2 + CK^2 = CG^2 + CE^2$ & $CK.CM = CG.CE.\,\text{fin.}\,q.$; erit $CM + CK = \sqrt{(CG^2 + 2CG.CE.\text{fin.}\,q + CE^2)}$ & $CM - CK = \sqrt{(CG^2 - 2CG \times CE.\,\text{fin.}\,q + CE^2)}$ unde ipsæ Diametri conjugatæ orthogonales reperiuntur.

TAB. VII. Fig. 29. 126. Sint igitur $CA$ & $CE$ ambæ Semidiametri conjugatæ Sectionis conicæ orthogonales, quæ vocari solent DIAMETRI PRINCIPALES, sese in Centro $C$ normaliter decussantes. Sit Abscissa $CP = x$, Applicata $PM = y$, eritque, uti vidimus, $yy = \alpha - \beta xx$, vocatis autem Semidiametris principalibus $AC = a$, $CE = b$ erit $\alpha = bb$ & $\beta = \frac{bb}{aa}$, unde fit $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$. Ex qua æquatione intelligitur, cum non mutetur, sive $x$ & $y$ sumantur affirmativæ sive negativæ, Curvam esse habituram quatuor partes similes & æquales utrinque circa Diametros $AC$ & $EF$ sitas. Erit nempe quadrans $ACE$ similis & æqualis quadranti $ACF$, hisque bini pares ad alteram partem Diametri $EF$ sunt positi.

127. Si ex Centro $C$, quod pro initio Abscissarum assumsimus, ducamus rectam $CM$, erit ea $= \sqrt{(xx + yy)} = \sqrt{(bb - \frac{bbxx}{aa} + xx)}$, unde intelligitur, si fuerit $b = a$, seu $CE = CA$, fore $CM = \sqrt{bb} = b = a$. Hoc ergo casu omnes rectæ ex Centro $C$ ad Curvam productæ inter se

erunt æquales; quæ, cum sit proprietas Circuli, manifestum est Sectionem conicam, cujus binæ Diametri conjugatæ principales sint inter se æquales, esse Circulum, cujus adeo æquatio inter Coordinatas orthogonales, positis $CP = x$ & $PM = y$, erit $yy = aa - xx$, existente Radio Circuli $CA = a$. CAP. V.

128. Sin autem non fuerit $b = a$, recta $CM$ per $x$ rationaliter nunquam exprimi poterit. Dabitur autem aliud punctum $D$ in Axe, a quo omnes rectæ ad Curvam ductæ $DM$ rationaliter exprimi possunt; ad quod inveniendum, ponatur $CD = f$, atque ob $DP = f - x$ erit $DM^2 = ff - 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = bb + ff - 2fx + \frac{(aa-bb)xx}{aa}$ quæ expressio quadratum evadet si fuerit $ff = \frac{(aa-bb)(bb+ff)}{aa}$ seu $o = aa - bb - ff$, unde fit $f = \pm\sqrt{(aa-bb)}$, hujusmodi ergo punctum dabitur geminum in Axe $AC$, utrinque scilicet a Centro in distantia $CD = \sqrt{(ab-bb)}$. Erit autem tum $DM^2 = aa - 2x\sqrt{(aa-bb)} + \frac{(aa-bb)xx}{aa}$, hincque $DM = a - \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a} = AC - \frac{CD.CP}{AC}$. Facto $CP = o$, fiet $DM = DE = a = AC$, sumta autem Abscissa $CP = CD$, seu $x = \sqrt{(aa-bb)}$, recta $DM$ abibit in Applicatam $DG$, eritque ergo $DG = \frac{bb}{a} = \frac{CE^2}{AC}$, seu fiet $DG$ tertia proportionalis ad $AC$ & $CE$.

129. Ob singularem hanc proprietatem, qua puncta $D$ hoc modo definita gaudent, ista Diametri principalis puncta omnino attentione sunt digna; plurimis aliis autem hæc eadem puncta prædita sunt eximiis proprietatibus, ob quas peculiaria nacta sunt nomina. Vocantur vero ista puncta FOCI seu UMBILICI Sectionis conicæ; &, cum in Diametro majori $a$ sint posita, ista Diameter a sua conjugata $b$ ita distinguitur, ut ea vocetur Axis principalis & *transversus*; dum altera $b$ ejus Axis *conjugatus* appellatur. Applicata vero orthogonalis $DG$ in ipso

 Foco alterutro erecta nomen SEMIPARAMETRI obtinuit, tota enim PARAMETER est Ordinata in $D$, seu $DG$ bis sumta, quæ etiam *latus rectum* nuncupatur. Est ergo Semiaxis conjugatus $CE$ media proportionalis inter Semiparametrum $DG$ & Semiaxem transversum $AC$. Termini porro Axis transversi, ubi is a Curva intersecatur, vocantur VERTICES, ut $A$; atque hanc habent proprietatem ut iis in locis tangens curvæ sit ad Axem principalem $AC$ normalis.

130. Ponatur semiparameter $DG = c$; & distantia Foci a Vertice $AD = d$, erit $CD = a - d = \surd(aa - bb)$ & $DG = \frac{bb}{a} = c$, unde fit $bb = ac$, & $a - d = \surd(aa - ac)$: ergo $ac = 2ad - dd$, & $a = \frac{dd}{2d - c}$, & $b = d\surd\frac{c}{2d - c}$. Ex datis ergo distantia Foci a Vertice $AD = d$ & semilatere recto $DG = c$, Sectio conica determinatur. Posito nunc $CP = x$ erit $DM = a - \frac{(a-d)x}{a} = \frac{dd}{2d - c} - \frac{(c-d)x}{d}$. Sit $DP = t$, erit $x = CD - t = \frac{(c-d)d}{2d - c} - t$; unde fit $DM = c + \frac{(c-d)t}{d}$. Vocetur angulus $ADM = v$, erit $\frac{t}{DM} = -\cos. v$, ideoque $d.\, DM = cd + (d - c)\, DM.\, \cos. v$ & $DM = \frac{cd}{d - (d - c).\, \cos. v}$, & $\cos. v = \frac{d(DM - DG)}{(d - c)\, DM}$.

CAPUT

## CAPUT VI.

### *De Linearum secundi ordinis subdivisione in genera.*

131. PROPRIETATES, quas in Capite præcedente elicuimus, in omnes Lineas, quæ ad ordinem secundum pertinent, æque competunt; neque enim ullius varietatis, qua istæ Lineæ aliæ ab aliis distinguuntur, fecimus mentionem. Quanquam autem omnes Lineæ secundi ordinis his expositis proprietatibus communiter gaudent, tamen eæ inter se ratione figuræ plurimum differunt; quamobrem Lineas in hoc ordine contentas distribui convenit in genera, quo facilius diversæ figuræ, quæ in hoc ordine occurrunt, distingui, atque proprietates, quæ tantum in singula genera competunt, evolvi queant.

132. Æquationem autem generalem pro Lineis secundi ordinis, mutando tantum Axem & Abscissarum initium, eo reduximus, ut omnes Lineæ secundi ordinis contineantur in hac æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, in qua $x$ & $y$ denotant Coordinatas orthogonales. Cum igitur pro qualibet Abscissa $x$ Applicata $y$ duplicem induat valorem, alterum affirmativum alterum negativum, iste Axis, in quo Abscissæ $x$ capiuntur, Curvam secabit in duas partes similes & æquales; eritque adeo iste Axis Diameter Curvæ orthogonalis, atque omnis Linea secundi ordinis habebit Diametrum orthogonalem, super qua, tanquam Axe, Abscissas hic assumo.

133. Tres igitur ingrediuntur in hanc æquationem quantitates constantes $\alpha$, $\beta$, & $\gamma$: quæ, cum infinitis modis inter se variari possint, innumerabiles varietates in Lineis curvis orientur, quæ autem vel magis vel minus a se invicem ratione figuræ discrepabunt. Primum enim eadem figura infinities ex proposita æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ resultat; variato numpe Abscissarum initio in Axe, quod fit dum Abscissa $x$

LIB. II. data quantitate vel augetur vel minuitur. Deinde eadem quoque figura, sub diversa magnitudine in æquatione continetur, ita ut infinitæ Lineæ curvæ prodeant, quæ tantum ratione quantitatis a se invicem differant, uti Circuli diversis Radiis descripti. Ex quibus manifestum est, non omnem litterarum $\alpha$, $\beta$, & $\gamma$ variationem diversas Linearum secundi ordinis species vel genera producere.

134. Maximum autem discrimen in Lineis curvis quæ in æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ continentur, suggerit natura coëfficientis $\gamma$, prout is vel affirmativum habuerit valorem vel negativum. Si enim $\gamma$ habeat valorem affirmativum, posita Abscissa $x$ infinita, quo casu terminus $\gamma xx$ infinities major evadet quam reliqui $\alpha + \beta x$, ac propterea expressio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ affirmativum obtinet valorem, Applicata $y$ pariter duplicem habebit valorem infinite magnum, alterum affirmativum alterum negativum, quod idem evenit si ponatur $x = -\infty$, quo casu nihilominus expressio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ induet valorem infinite magnum affirmativum. Hanc ob rem, existente $\gamma$ quantitate affirmativa, Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes, binos Abscissæ $x = +\infty$ & binos Abscissæ $x = -\infty$ respondentes. Hæ igitur curvæ quatuor ramis in infinitum excurrentibus præditæ unum Linearum secundi ordinis genus constituere censentur, atque nomine HYPERBOLARUM appellantur.

135. Sin autem coëfficiens $\gamma$ negativum habuerit valorem, tum, posito sive $x = +\infty$ sive $x = -\infty$ expressio $\alpha + \beta x + \gamma xx$ negativum valorem tenebit, ideoque Applicata $y$ imaginaria fiet. Neque igitur usquam in his Curvis Abscissa neque Applicata poterit esse infinita, ideoque nulla dabitur Curvæ portio in infinitum excurrens, sed tota Curva in spatio finito ac determinato continebitur. Hæc igitur Linearum secundi ordinis species nomen ELLIPSIUM obtinuit, quarum propterea natura continetur in hac æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ si $\gamma$ fuerit quantitas negativa.

136. Cum igitur valor ipsius $\gamma$, prout is fuerit vel affirma-

tivus vel negativus, tam diversam Linearum secundi ordinis indolem producat, ut hinc merito duo diversa genera constituantur: si ponatur $\gamma = 0$, qui valor inter affirmativos & negativos medium tenet locum, Curva quoque hinc resultans mediam quandam speciem inter Hyperbolas atque Ellipses constituet, quæ PARABOLA vocatur, cujus ergo natura hac exprimetur æquatione $yy = \alpha + \beta x$. Hic perinde est sive $\beta$ fuerit quantitas affirmativa sive negativa, quoniam indoles Curvæ non mutatur sumta Abscissa $x$ negativa. Sit igitur $\beta$ quantitas affirmativa, atque manifestum est, crescente Abscissa $x$ in infinitum, Applicatam $y$ quoque infinitam fore tam affirmativam quam negativam, ex quo Parabola duos habebit ramos in infinitum excurrentes, plures autem duobus habere non poterit, quia posito $x = -\infty$, Applicatæ $y$ valor fit imaginarius. CAP. VI.

137. Habemus ergo tres Linearum secundi ordinis species, Ellipsin, Parabolam, & Hyperbolam, quæ a se invicem tantopere discrepant, ut eas inter se confundere omnino non liceat. Discrimen enim essentiale in numero ramorum in infinitum excurrentium consistit; Ellipsis enim nullam portionem habet in infinitum abeuntem, sed tota in spatio finito includitur. Parabola vero duos habet ramos in infinitum excurrentes: & Hyperbola quatuor. Quare, cum in Capite præcedente proprietates Sectionum conicarum in genere simus contemplati, nunc quibus proprietatibus quæque species sit prædita, videamus.

138. Incipiamus ab Ellipsi, cujus æquatio est hæc $yy = \alpha + \beta x - \gamma xx$, sumtis Abscissis in Diametro orthogonali. Quoniam vero initium Abscissarum ab arbitrio nostro pendet, si id removeamus intervallo $\frac{\beta}{2\gamma}$, orietur æquatio hujus formæ $yy = \alpha - \gamma xx$, in qua Abscissæ a Centro figuræ capiuntur. Sit igitur $C$ Centrum & $AB$ Diameter orthogonalis, atque erit Abscissa $CP = x$, & Applicata $PM = y$. Fiet ergo TAB. VIII. Fig. 31.

LIB. II. $y = 0$, sumta $x = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ &, si $x$ limites hos $+\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, $-\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ transgrediatur Applicata $y$ fiet imaginaria; quod indicio est totam Curvam intra istos limites contineri. Erit ergo $CA = CB = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$: tum facto $x = 0$, fiet $CD = CE = \sqrt{\alpha}$. Ponatur ergo Semidiameter seu Semiaxis principalis $CA = CB = a$, & Semiaxis conjugatus $CD = CE = b$, erit $\alpha = bb$ & $\gamma = \frac{bb}{aa}$. Unde pro Ellipsi ista orietur æquatio $yy = bb - \frac{bbxx}{aa} = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$.

139. Quando isti Semiaxes conjugati $a$ & $b$ fiunt inter se æquales, tum Ellipsis abibit in Circulum ob $yy = aa - xx$, seu $yy + xx = aa$; erit enim $CM = \sqrt{(xx + yy)} = a$, ideoque omnia Curvæ puncta $M$ æqualiter a Centro $C$ erunt remota, quæ est proprietas Circuli. Sin autem Semiaxes $a$ & $b$ inter se fuerint inæquales, tum Curva erit oblonga, nempe erit vel $AB$ major quam $DE$ vel $DE$ major quam $AB$. Quia vero Axes conjugati $AB$ & $DE$ inter se commutari possunt, atque perinde est in utro Abscissas capiamus, ponamus $AB$ esse Axem majorem, seu $a$ majorem quam $b$; atque in hoc Axe existent Foci Ellipsis $F$ & $G$ sumendo $CF = CG = \sqrt{(aa - bb)}$, Semiparameter vero, seu Semilatus rectum Ellipsis erit $= \frac{bb}{a}$, quæ exprimit magnitudinem Applicatæ in alterutro Foco $F$ vel $G$ erectæ.

140. Ad Curvæ punctum $M$ ducantur ex utroque Foco rectæ $FM$ & $GM$, eritque, uti supra vidimus, $FM = AC - \frac{CF.CP}{AC} = a - \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$, & $GM = a + \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$: unde fit $FM + GM = 2a$. Quare, si ad quodvis Curvæ punctum $M$ ex ambobus Focis ducantur rectæ $FM$ & $GM$, earum summa semper æquabitur Axi majori

$AB = 2a$; ex quo cum insignis Focorum proprietas perspicitur, tum modus facilis Ellipsin mechanice describendi colligitur. CAP. VII.

141. In puncto $M$ ducatur tangens $TMt$, quæ Axibus occurrat in punctis $T$ & $t$; eritque, ut supra demonstravimus, $CP : CA = CA : CT$; unde $CT = \frac{aa}{x}$: similique modo, permutatis Coordinatis, $Ct = \frac{bb}{y}$. Erit ergo $TP = \frac{aa}{x} - x$, $TF = \frac{aa}{x} - \sqrt{(aa - bb)}$, & $TA = \frac{aa}{x} - a$. Fiet itaque $TP = \frac{aa - xx}{x} = \frac{aayy}{bbx}$, & $TM = \frac{y\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}{bbx}$, hincque *tang.* $CTM = \frac{bbx}{aay}$; *sin.* $CTM = \frac{bbx}{\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}$ & *cos.* $CTM = \frac{aay}{\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}$. Quare, si ad Axem in $A$ normalis erigatur $AV$, quæ Curvam simul tanget, erit $AV = \frac{a(a - x)}{x} \cdot \frac{bbx}{aay} = \frac{bb(a - x)}{ay} = b\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$ ob $ay = b\sqrt{(aa - xx)}$.

142. Cum sit $FT = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$ & $FM = \frac{aa - x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ erit $FT : FM = a : x$. Simili vero modo ob $GT = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{x}$ & $GM = \frac{aa + x\sqrt{(aa - bb)}}{a}$ erit $GT : GM = a : x$; unde erit $FT : FM = GT : GM$. At est $FT : FM = $ *sin.* $FMT$ : *sin.* $CTM$ & $GT : GM = $ *sin.* $GMt$ : *sin.* $CTM$, quam ob rem erit *sin.* $FMT = $ *sin.* $GMt$, ideoque angulus $FMT = $ angulo $GMt$. Ambæ ergo rectæ ex Focis ad punctum Curvæ quodvis $M$ ductæ æqualiter inclinantur ad tangentem Curvæ in illo puncto $M$, quæ est maxime principalis Factorum proprietas.

143. Cum sit $GT : GM = a : x$, ob $CT = \frac{aa}{x}$ erit quo-

 que $CT : CA = a : x$; unde $GT : GM = CT : CA$, quare si ex Centro $C$ rectæ $GM$ parallela ducatur $CS$, tangenti in $S$ occurrens, erit $CS = CA = a$: eodem autem modo si ex $C$ rectæ $FM$ parallela ducatur ad tangentem erit ea pariter $=$ $CA = a$. Cum autem sit $TM = \frac{y}{bbx} \sqrt{(b^4xx + a^4yy)}$, erit, ob $aayy = aabb - bbxx$, $TM = \frac{y}{bx} \sqrt{(a^4 - xx}$ $(aa - bb))$: at est $FT.GT = \frac{a^4 - xx(aa - bb)}{xx}$; unde $TM =$ $\frac{y}{b} \sqrt{FT.\,GT}$. Quare, ob $TG : TC = TM : TS$, erit $TS = \frac{TM.\,CT}{TG}$, ideoque $TS = \frac{y.\,CT}{b} \sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{y.\,CT.\,FT}{b\sqrt{FT.\,GT}} =$ $\frac{yy.\,CT.\,FT}{bb.\,TM}$. Deinde est $PT = \frac{aayy}{bbx} = \frac{CT.\,yy}{bb}$, ergo $TS =$ $\frac{PT.\,FT}{TM}$, ideoque $TM : PT = FT : TS$; unde intelligitur triangula $TMP$ & $TFS$ esse similia, ideoque rectam $FS$ ad tangentem ex Foco $F$ esse normalem. Erit vero $S\,V = \frac{AF.\,MV}{GM}$, quod ex his expressionibus eruere licet.

144. Quod si ergo ex alterutro Foco $F$ in tangentem ducatur perpendiculum $FS$, & ad punctum $S$ ex Centro $C$ recta $CS$ jungatur, erit hæc $CS$ perpetuo semiaxi majori $AC = a$ æqualis. Erit vero ob $TM : y = TF : FS$, $FS = \frac{y.\,TF}{TM} =$ $\frac{b.\,TF}{\sqrt{FT.\,GT}} = b\sqrt{\frac{FT}{GT}}$, ergo $GT : FT = GM : FM =$ $CD^2 : FS^2$; perpendiculum vero ex altero Foco in tangentem demissum erit $= b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$, quare inter hæc perpendicula erit Semiaxis minor $CD = b$ media proportionalis. Demittatur nunc quoque ex Centro $C$ in tangentem perpendiculum $CQ$ erit $TF : FS = CT : CQ$ ergo $CQ = \frac{b.\,CT}{\sqrt{FT.\,GT}} =$

$\frac{bx.CT}{a\sqrt{FM.GM}} = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$, unde $CQ - FS = \frac{b.CF}{\sqrt{FT.GT}} =$ 
$CX$, ducta $FX$ tangenti parallela. Hinc erit $CQ - CX = \frac{b\ TF}{\sqrt{FT.GT}}$ & $CQ + CX = \frac{b.TG}{\sqrt{FT.GT}}$, unde $CQ^2 - CX^2 = bb$ & $CX = \sqrt{(CQ^2 - bb)}$ : ex dato ergo Axe minori, in perpendiculo $CQ$ reperitur punctum $X$ unde normalis educta per Focum $F$ transibit.

145. His Focorum proprietatibus expositis, consideremus duas quasvis Diametros conjugatas. Erit autem $CM$ Semidiameter, cujus conjugata reperietur si tangenti $TM$ ex Centro parallela ducatur $CK$. Ponatur $CM = p$, $CK = q$, & angulus $MCK = CMT = s$, erit primo $pp + qq = aa + bb$ & secundo $pq.\,fin.\,s = ab$, uti supra vidimus. At vero erit $pp = xx + yy = bb + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$ & $qq = aa + bb - pp = aa - \frac{(aa - bb)xx}{aa} = FM.GM$, eodemque modo $pp = FK.GK$. Deinde, cum sit $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$, erit $fin.\,CMQ = fin.\,s = \frac{ab}{p\sqrt{FM.GM}}$. Denique erit $TM : TP = \frac{y}{b}\sqrt{FT.GT}$, $\frac{aayy}{bbx} = \sqrt{FM.GM.} = \frac{ay}{b} = CK : CR$, unde $CR = \frac{ay}{b}$, & $KR = \frac{bx}{a}$, ideoque $CR.KR = CP.PM$. Denique erit $fin.\,FMS = \frac{b}{\sqrt{GM.FM}} = \frac{b}{q}$ : quia porro est $x = CP\frac{a\sqrt{(pp - bb)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$ & $y = \frac{b\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}} = PM$, atque $CR = \frac{a\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$ & $KR = \frac{b\sqrt{(pp - bb)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$, erit $tang.\,ACM = \frac{y}{x}$, & $tang.\,2\,ACM = \frac{2yx}{xx - yy} = \frac{3ab\sqrt{(aa - pp)(pp - bb)}}{(aa + bb)pp - 2aabb}$. At est $ab = pq.\,fin.\,s$, $aa + bb = pp + qq$,

 & $\sqrt{(aa-pp)(pp-bb)} = -pq.cos.s$, unde fit *tang.* $2ACM = \frac{-2qq.\,cos.\,s}{pp+qq.\,cos.\,2s}$, quia $cos.\,s$ est negativus. Tandem est $CK^2 = MT.Mt$; ex superioribus vero eruitur $MV = q\sqrt{\frac{AP}{BP}}$ & $AV = b\sqrt{\frac{AP}{BP}}$; unde erit $AV : MV = b : q = CE : CK$. Ergo rectæ, si ducantur, $AM$ & $EK$, inter se erunt parallelæ.

146. Quia est $pq.fin.s = ab$, erit $pq$ major quam $ab$; &, cum sit $pp+qq = aa+bb$, quantitates $p$ & $q$ magis ad rationem æqualitatis accedunt, quam $a$ & $b$, unde inter omnes Diametros conjugatas, illæ quæ sunt orthogonales maxime a se invicem discrepant. Dabuntur ergo duæ Diametri conjugatæ inter se æquales, ad quas inveniendas sit $q=p$, eritque $2pp = aa+bb$, & $p=q=\sqrt{\frac{aa+bb}{1}}$, & $fin.\,s = \frac{2ab}{aa+bb}$, atque $cos.\,s = \frac{-aa+bb}{aa-bb}$; unde fit $fin.\,\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{aa}{aa-bb}}$, $cos.\,\frac{1}{2}s = \sqrt{\frac{bb}{aa-bb}}$, ergo $tang.\,\frac{1}{2}s = \frac{a}{b} = tang.\,CEB$, & $MCK = 2CEB = AEB$. Porro $CP = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $CM = \frac{b}{\sqrt{2}}$, quare Semidiametri conjugatæ inter se æquales $CM$, $CK$ erunt parallelæ Cordis $AE$ & $BE$.

147. Si Abscissæ a Vertice $A$ computentur, ponaturque $AP = x$, $PM = y$, cum nunc sit $a-x$ quod ante erat $x$, habebitur ista æquatio $yy = \frac{bb}{aa}(2ax-xx) = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx$, ubi patet esse $\frac{2bb}{a}$ Parametrum seu latus rectum Ellipsis. Ponatur Semilatus rectum, seu Applicata in Foco $= c$, & distantia Foci a Vertice $AF = d$, erit $\frac{bb}{a} = c$ & $a - \sqrt{(aa-bb)} = d = a - \sqrt{(aa-ac)}$, unde fit $2ad - dd = ac$ & $a = \frac{dd}{2d-c}$. Hinc erit $yy = 2cx - \frac{c(2d-c)xx}{dd}$, quæ est

æquatio

æquatio pro Ellipsi inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$, Abscissis $x$ in Axe principali $AB$ a Vertice $A$ computatis, quæ obtinetur ex datis distantia Foci a Vertice $AF = d$ & Semilatere recto $= c$; ubi notandum est semper esse debere $2d$ majorem quam $c$, quia est $AC = a = \frac{dd}{2d - c}$, & $CD = b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}$. CAP. VI.

148. Quod si ergo fuerit $2d = c$ erit $yy = 2cx$, quam æquationem supra vidimus esse pro Parabola: æquatio enim superior $yy = \alpha + \beta x$ ad hanc formam reducitur, initio Abscissarum intervallo $= \frac{\alpha}{\beta}$ mutato. Sit igitur $MAN$ Parabola, cujus natura inter Abscissam $AP = x$, & Applicatam $PM = y$ hac æquatione exprimatur $yy = 2cx$. Erit ergo distantia Foci a Vertice $AF = d = \frac{1}{2}c$, & Semiparameter $FH = c$, atque ubique $PM^2 = 2FH.AP$: unde, posita Abscissa $AP$ infinita, simul Applicatæ $PM$ & $PN$ in infinitum excrescunt; ideoque Curva ad utramque Axis $AP$ partem in infinitum extenditur Posita autem Abscissa $x$ negativa Applicata fit imaginaria, hincque Axi ultra $A$ versus $T$ nulla Curvæ portio respondet. TAB. VIII. Fig. 32.

149. Cum æquatio pro Ellipsi abeat in Parabolam, facto $2d = c$, manifestum est Parabolam nil aliud esse præter Ellipsin, cujus Semiaxis $a = \frac{dd}{2d - c}$ fit infinitus; quam ob rem proprietates omnes, quas pro Ellipsi invenimus, ad Parabolam transferentur, posito Axe $a$ infinito. Primum autem, cum sit $AP = \frac{1}{2}c$, erit $FP = x - \frac{1}{2}c$, hinc ducta ex Foco $F$ ad Curvæ punctum $M$ recta $FM$ erit, $FM^2 = xx - cx + \frac{1}{4}cc + yy = xx + cx + \frac{1}{4}cc$, ideoque $FM = x +$

 $\frac{1}{2}c = AP + AF$, quæ eſt præcipua proprietas Foci in Parabola.

150. Quoniam Parabola naſcitur ex Ellipſi, Axe majore in infinitum aucto; conſideremus Parabolam, tanquam eſſet Ellipſis, ſitque ejus Semiaxis $AC = a$, exiſtente $a$ quantitate infinita, ita ut Centrum $C$ infinite diſtet a Vertice $A$. Ad $M$ ducatur tangens Curvæ $MT$ Axi occurrens in $T$; quia erat $CP : CA = CA : CT$, erit $CT = \frac{aa}{a - x}$, ob $CP = a - x$; hincque $AT = \frac{ax}{a - x}$. At, cum ſit $a$ quantitas infinita, Abſciſſa $x$ præ ea evaneſcet, eritque $a - x = a$, ideoque $AT = x = AP$: quod idem hoc modo oſtendi poteſt, cum ſit $AT = \frac{ax}{a - x}$, erit $AT = x + \frac{xx}{a - x}$, at quia fractionis $\frac{xx}{a - x}$ denominator eſt infinitus, numeratore exiſtente finito, valor fractionis erit evaneſcens, ideoque $AT = AP = x$.

151. Quod ſi ergo ex puncto $M$ ad Centrum Parabolæ $C$ infinite diſtans ducatur Linea $MC$, quæ erit Axi $AC$ parallela, ea quoque erit Diameter Curvæ omnes Chordas tangenti $MT$ parallelas biſecans. Scilicet, ſi ducatur Chorda ſeu Ordinata $mn$ tangenti $MT$ parallela, ea a Diametro $Mp$ biſecabitur in $p$. Omnis ergo recta Axi $AP$ parallela ducta in Parabola erit Diameter obliquangula. Ad hujuſmodi Diametrorum naturam eruendam ſit $Mp = t$, $pm = u$, ducatur ex $m$ ad Axem normalis $msr$; erit ob $PT = 2x$, & $MT = \surd(4xx + 2cx)$, $\surd(4xx + 2cx) : 2x : \surd 2cx = pm : ps : ms$, unde obtinetur $ps = \frac{2xu}{\surd(4xx + 2cx)} = u\surd\frac{2x}{2x + c}$, & $ms = u\surd\frac{c}{2x + c}$; hinc erit $Ar = x + t + u\surd\frac{2x}{2x + c}$, & $mr = \surd 2cx + u\surd\frac{c}{2x + c}$. Quia vero eſt $mr^2 = 2c . Ar$,

erit $2cx + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}} + \frac{cuu}{2x+c} = 2cx + 2ct + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}$, hincque $uu = 2t(2x+c) = 4\,FM.t$, seu $pm^2 = 4\,FM.Mp$. At anguli obliquitatis $mps$ erit Sinus $= \sqrt{\frac{c}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AF}{FM}}$, Cosinus $= \sqrt{\frac{2x}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AP}{FM}}$, ideoque *fin.* $2\,mps = \frac{2\sqrt{2cx}}{2x+c} = \frac{y}{FM} =$ *fin.* $MFp$, ergo erit angulus $mps = MTP = \frac{1}{2}MFr$.

152. Quia est $MF = AP + AF$, ob $AP = AT$, erit $FM = FT$; ideoque triangulum $MFT$ isosceles, & angulus $MFr = 2\,MTA$, ut modo invenimus. Cum deinde sit $MT = 2\sqrt{x(x+\frac{1}{2}c)}$, erit $MT = 2\sqrt{AP.FM}$, hinc ex Foco $F$ in tangentem demisso perpendiculo erit $MS = TS = \sqrt{AP.FM} = \sqrt{AT.TF}$, unde erit $AT:TS = TS:TF$. Ex qua analogia perspicitur punctum $S$ fore in recta $AS$ ad Axem in Vertice $A$ normali. Erit vero $AS = \frac{1}{2}PM$, & $AS:TS = AF:FS$, ergo $FS = \sqrt{AF.FM}$ & $FS$ erit media proportionalis inter $AF$ & $FM$. Præterea vero erit $AS:MS = AS:TS = FS:FM = \sqrt{AF}:\sqrt{FM}$. Quod, si ducatur ad tangentem in $M$ normalis $MW$ Axem secans in $W$, erit $PT:PM = PM:PW$, seu $2x:\sqrt{2cx} = \sqrt{2cx}:PW$, unde fit $PW = c$, ubique igitur intervallum $PW$, quod in Axe inter Applicatam $PM$ & normalem $WM$ intercipitur, constantem habet magnitudinem atque æquale est semissi Lateris recti, seu Applicata $FH$. Erit autem $FW = FT = FM$ & $MW = 2\sqrt{AF.FM}$.

153. Pervenimus jam ad Hyperbolam, cujus natura exprimitur hac æquatione $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$, Abscissis super Diametro orthogonali sumtis. Quod si autem initium Abscissarum transferatur intervallo $\frac{\beta}{2\gamma}$, orietur ejusmodi æquatio

LIB. II. $yy = \alpha + \gamma xx$, in qua Abſciſſæ a Centro computantur. Debet autem $\gamma$ eſſe quantitas affirmativa ; quod vero ad $\alpha$ attinet, perinde eſt ſive ea ſit quantitas affirmativa ſive negativa, permutatis enim Coordinatis $x$ & $y$, affirmatio quantitatis $\alpha$ in TAB IX. Fig. 33. negationem mutatur & viciſſim. Quam ob rem ſit $\alpha$ quantitas negativa, & $yy = \gamma xx - \alpha$, atque apparet Applicatam $y$ bis evaneſcere : ſcilicet, ſi fuerit $x = +\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ & $x = -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$. Denotante ergo $C$ Centro, ſint $A$ & $B$ loca, ubi Axis a Curva trajicitur ; ac, poſito Semiaxe $CA = CB = a$, erit $a = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, & $\alpha = \gamma aa$, unde fit $yy = \gamma xx - \gamma aa$. Quamdiu ergo eſt $x^2$ minor quam $a^2$, Applicata erit imaginaria, unde toti Axi $AB$ nulla Curvæ portio reſpondet. Sumto vero $xx$ majore quam $aa$, Applicatæ continuo creſcunt, atque tandem in infinitum abeunt, habebit ergo Hyperbola quatuor ramos $AI$, $Ai$, $BK$, $Bk$ in infinitum excurrentes & inter ſe ſimiles atque æquales, quæ eſt proprietas principalis Hyperbolarum.

154. Quia, poſito $x = 0$, fit $yy = -\gamma aa$, Hyperbola non inſtar Ellipſis habebit Axem conjugatum, quod in Centro $C$ Applicata eſt imaginaria. Erit ergo ipſe Axis conjugatus imaginarius, quem, ut aliquam ſimilitudinem Ellipſis ſervemus, ponamus $= b\sqrt{-1}$, ita ut fit $\gamma aa = bb$, & $\gamma = \frac{bb}{aa}$. Vocata ergo Abſciſſa $CP = x$, & Applicata $PM = y$, erit $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, ideoque æquatio pro Ellipſi ante tractata $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ tranſmutatur in æquationem pro Hyperbola ponendo $-bb$ loco $bb$. Ob hanc ergo affinitatem proprietates Ellipſis ante inventæ facile ad Hyperbolam transferuntur. Ac primo quidem, cum pro Ellipſi diſtantia Focorum a Centro eſſet $= \sqrt{(aa - bb)}$, pro Hyperbola

erit $CF = CG = \surd(aa + bb)$. Hinc erit $FP = x - \surd(aa+bb)$ & $GP = x + \surd(aa+bb)$; unde, ob $yy = -bb + \frac{bbxx}{aa}$, fiet $FM = \surd(aa + xx + \frac{bbxx}{aa} - 2x\surd(aa+bb)) = \frac{x\surd(aa+bb)}{a} - a$ & $GM = \surd(aa + xx + \frac{bbxx}{aa} + 2x\surd(aa+bb)) = \frac{x\surd(aa+bb)}{a} + a$. Ductis ergo ex utroque Foco ad Curvæ punctum $M$ rectis $FM, VM$ erit $FM + AC = \frac{CP.CF}{CA}$ & $GM - AC = \frac{CP.CF}{CA}$, harum ergo rectarum differentia $GM - FM$ æqualis eſt $2AC$. Quemadmodum ergo in Ellipſi ſumma harum duarum Linearum æquatur Axi principali $AB$, ita pro Hyperbola differentia æqualis eſt Axi principali $AB$. 

155. Hinc etiam poſitio tangentis $MT$ definiri poteſt, eſt enim perpetuo pro Lineis ſecundi ordinis $CP : CA = CA . CT$: unde fit $CT = \frac{aa}{x}$, & $PT = \frac{xx - aa}{x} = \frac{aayy}{bbx}$; hincque $MT = \frac{y}{bbx}\surd(b^4x^2 + a^4y^2) = \frac{y}{bx}\surd(aaxx + bbxx - a^4)$. At eſt $FM.GM = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{aa}$, ergo $MT = \frac{ay}{bx}\surd FM.GM$. Deinde eſt $FT = \surd(aa+bb) - \frac{aa}{x}$, & $GT = \surd(aa+bb) + \frac{aa}{x}$ ergo $FT : FM = a : x$, & $GT : GM = a : x$, unde ſequitur $FT : GT = FM : GM$, quæ proportio indicat angulum $FMG$ per tangentem $MT$ biſecari, eſſeque $FMT = GMT$. Recta autem $CM$ producta erit Diameter obliquangula omnes Ordinatas tangenti $MT$ parallelas biſecans.

156. Demittatur ex Centro $C$ in tangentem perpendicularis $CQ$, erit $TM : PT : PM = CT : TQ : CQ$ ſeu $\frac{ay}{bx}\surd FM.GM : \frac{aayy}{bbx} : y = \frac{aa}{x} : TQ : CQ$; unde oritur

LIB. II. $TQ = \frac{a^3 y}{bx\sqrt{FM.GM}}$ & $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}$. Demittatur ſimili modo ex Foco $F$ in tangentem perpendiculum $FS$, erit $TM:PT:PM = FT:TS:FS$, ſeu $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM} : \frac{aayy}{bbx} : y = \frac{a.FM}{x} : TS : FS$: unde oritur $TS = \frac{aayFM}{bx\sqrt{FM.GM}}$ & $FS = \frac{b.FM}{\sqrt{FM.GM}}$; pariterque, ſi ex altero Foco $G$ in tangentem ducatur perpendicularis $Gs$, erit $Ts = \frac{aay.GM}{bx\sqrt{FM.GM}}$, & $Gs = \frac{b.GM}{\sqrt{FM.GM}}$. Hinc ergo habetur $TS.Ts = \frac{a^4 yy}{bbxx} = \frac{aa(xx-aa)}{xx} = CT.PT$, & $TS:CT = PT:Ts$. Deinde fit $FS.Gs = bb$. Quia porro eſt $QS = Qs$ erit $QS = \frac{TS+Ts}{2} = \frac{aay(FM+GM)}{2bx\sqrt{FM.GM}} = \frac{ay\sqrt{(aa+bb)}}{b\sqrt{FM.GM}} = Qs$, unde ſequitur $CS^2 = CQ^2 + QS^2 = \frac{aab^4 + a^4yy + aabbyy}{bb.FM.GM} = \frac{aab^4 + (aa+bb)(bbxx - aabb)}{bb.FM.GM} = \frac{(aa+bb)xx - a^4}{FM.GM} = aa$. Erit ergo, uti in Ellipſi, recta $CS = a = CA$. Deinde eſt $CQ + FS = \frac{bx\sqrt{(aa+bb)}}{a\sqrt{FM.GM}}$, ideoque $(CQ+FS)^2 - CQ^2 = \frac{bbxx(aa+bb) - a^4bb}{aa.FM.GM} = bb$. Quare; ſi ducatur ex Foco $F$ tangenti parallela $FX$, ſecans perpendiculum $CQ$ productum in $X$, erit $CX = \sqrt{(bb + CQ^2)}$, cui ſimilis proprietas pro Ellipſi eſt inventa.

157. Si in Verticibus $A$ & $B$ ad Axem perpendiculares erigantur donec tangenti occurrant in $V$ & $v$, ob $AT = \frac{a(x-a)}{x}$ & $BT = \frac{a(x+a)}{x}$, $PT:PM = AT:AV = BT:Bv$, hinc fit $AV = \frac{bb(x-a)}{ay}$ & $Bv = \frac{bb(x+a)}{ay}$; ergo

$AV.Bv = \frac{b^2(xx-aa)}{aayy} = bb$, seu $AV.Bv = FS.Gs$. Deinde $PT:TM = AT:TV = BT:Tv$; ergo $TV = \frac{b(x-a)}{xy}\sqrt{FM.GM}$ & $Tv = \frac{b(x+a)}{xy}\sqrt{FM.GM}$: unde fit $TV.Tv = \frac{aa}{xx}FM.GM = FT.GT$. Simili autem modo hinc plura alia consectaria deduci possunt.

158. Quia est $CT = \frac{aa}{x}$, patet quo major capiatur Abscissa $CP = x$, eo minus futurum esse intervallum $CT$: atque adeo tangens, quæ Curvam in infinitum productam tangit, per ipsum Centrum $C$ transibit, fietque $CT = 0$. Cum autem sit *tang.* $PTM = \frac{PM}{PT} = \frac{bbx}{aay}$, puncto $M$ in infinitum abeunte, seu posito $x = \infty$, fit $y = \frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)} = \frac{bx}{a}$. Tangens ergo Curvæ in infinitum productæ, & per Centrum $C$ transibit, & cum Axe angulum constituet $ACD$ cujus tangens $= \frac{b}{a}$. Posita ergo in Vertice $A$ ad Axem normali $AD = b$, tum recta $CD$ in infinitum utrinque producta, Curvam nusquam quidem tanget, at Curva continuo magis ad eam appropinquabit, donec in infinitum tota cum recta $CI$ confundatur. Hoc idem valebit de parte $Ck$, quæ tandem cum ramo $Bk$ confundetur. Atque si ad alteram partem sub eodem angulo ducatur recta $KCi$, ea cum ramis $BK$ & $Bi$ in infinitum productis conveniet. Hujusmodi autem Lineæ rectæ, ad quas Linea quæpiam Curva continuo propius accedit, in infinitum autem excurrens demum attingit, ASYMTOTÆ vocantur, unde Lineæ rectæ $ICk$, $KCi$ sunt binæ Asymtotæ Hyperbolæ.

159. Asymtotæ ergo se mutuo in Centro $C$ Hyperbolæ decussant, atque ad Axem inclinantur angulo $ACD = ACd$, cujus tangens $= \frac{b}{a}$, angulique dupli $DCd$ tangens $= \frac{2ab}{aa-bb}$,

LIB. II. unde patet si fuerit $b = a$, fore angulum, sub quo Asymtotæ se intersecant, $DCd =$ recto; quo casu Hyperbola *æquilatera* dicitur. Cum autem sit $AC = a$, $AD = b$, erit $CD = Cd = \surd(aa + bb)$; quare, si ex Foco $G$ in utramvis Asymtotam perpendiculum $GH$ demittatur, ob $CG = \surd(aa + bb) = CD$, erit $CH = AC = BC = a$, & $GH = b$.

160. Producatur Ordinata $MPN = 2y$ utrinque donec Asymtotas secet in $m$ & $n$; erit $Pm = Pn = \frac{bx}{a}$, & $Cm = Cn = \frac{x\surd(aa+bb)}{a} = FM + AC = GM - AC$. Tum vero erit $Mm = Nn = \frac{bx - ay}{a}$ & $Nm = Mn = \frac{bx + ay}{a}$, unde fit $Mm.Nm = Mm.Mn = \frac{bbxx - aayy}{aa} = bb$, ob $aayy = bbxx - aabb$: erit ergo ubique $Mm.Nm = Mm \times Mn = Nn.Nm = Nn.Mn = bb = AD^2$. Ducatur ex $M$ Asymtotæ $Cd$ parallela $Mr$; erit $2b\surd(aa+bb) = Mm : mr\,(Mr)$, unde fit $mr = Mr = \frac{(bx-ay)\surd(aa+bb)}{2ab}$ & $Cm - mr = Cr = \frac{(bx+ay)\surd(aa+bb)}{2ab}$. Hinc ergo conficietur $Mr.Cr = \frac{(bbxx - aayy)(aa+bb)}{4aabb} = \frac{aa+bb}{4}$. Vel, ducta ex $A$ Asymtotæ $Cd$ parallela $AE$, erit $AE = CE = \frac{1}{2}\surd(aa+bb)$, ideoque erit $Mr.Cr = AE.CE$; quæ est proprietas primaria Hyperbolæ ad Asymtotas relatæ.

TAB. IX. Fig. 34. 161. Quod si ergo Abscissæ $CP = x$, in una Asymtota a Centro sumantur, & Applicatæ $PM = y$ alteri Asymtotæ parallelæ statuantur, erit $yx = \frac{aa+bb}{4}$, existente $AC = BC = a$, & $AD = Ad = b$: seu, si ponatur $AE = CE = h$, erit $yx = hh$, & $y = \frac{hh}{x}$. Posito ergo $x = 0$, fit $y = \infty$, ac vicissim facto $x = \infty$ fiet $y = 0$. Agatur jam per

per punctum Curvæ $M$ recta quæcunque $QMNR$, quæ parallela sit ductæ pro libitu rectæ $GH$, ac ponatur $CQ = t$, $QM = u$, erit $GH : CH : CG = u : PQ : PM$, ergo $PQ = \frac{CH}{GH}u$, $PM = \frac{CG}{GH}u$ : unde $y = \frac{CG}{GH}u$ & $x = t - \frac{CH}{GH}u$; quibus valoribus substitutis, erit $\frac{CG}{GH}tu - \frac{CH.CG}{GH^2} \times uu = hh$, seu $uu - \frac{GH}{CH}tu + \frac{GH^2}{CH.CG}hh = 0$. Habebit ergo Applicata $u$ duplicem valorem, nempe $QM$ & $QN$, quarum summa erit $= \frac{GH}{CH}t = QR$, & rectangulum $QM \times QN = \frac{GH^2}{CH.CG}hh$. Cap. VI.

162. Cum igitur sit $QM + QN = QR$, erit $QM = RN$ & $QN = RM$. Quare, si puncta $M$ & $N$ conveniant quo casu recta $QR$ Curvam tanget, tum ea in ipso puncto contactus bisecabitur. Scilicet, si recta $XY$ tangat Hyperbolam, punctum contactus $Z$ in medio rectæ $XY$ erit positum. Unde, si ex $Z$ alteri Asymtotæ parallela ducatur $ZV$, erit $CV = VY$, hincque ad quodvis Hyperbolæ punctum $Z$ expedite tangens ducetur. Sumatur scilicet $VY = CV$, ac recta per $Y$ & Curvæ punctum $Z$ ducta Hyperbolam in hoc puncto $Z$ tanget.

Cum ergo sit $CV.ZV = hh = \frac{aa+bb}{4}$, erit $CX.CY = aa + bb = CD^2 = CD.Cd$: quocirca, si rectæ $DX$ & $dY$ ducerentur, eæ inter se forent parallelæ; unde facillimus oritur modus quotcunque Curvæ tangentes ducendi.

163. Quoniam deinde est rectangulum $QM.QN = \frac{GH^2}{CH.CG}hh$, patet, ubicunque recta $QR$ ipsi $HG$ parallela ducatur, fore semper rectangulum $QM.QN$ ejusdem magnitudinis. Erit ergo etiam $QM.QN = QM.MR = QN \times NR = \frac{CH^2}{CH.CG}hh$. Quod, si ergo concipiatur ducta tan-

 gens ipsi $QR$ parallela, quia ea intra Asymtotas in puncto contactus bisecabitur, & si tangentis semissis vocetur $= q$, erit semper $QM.QN = QM.MR = RN.RM = RN \times NQ = qq$, quæ est insignis proprietas Hyperbolarum intra Asymtotas descriptarum.

164. Quoniam Hyperbola ex duabus partibus diametraliter oppositis $IAi$ & $KBk$ constat, istæ proprietas non solum ad eas rectas intra Asymtotas ductas pertinent, quæ eandem Curvæ partem in duabus punctis intersecant. Sed etiam ad eas, quæ ad partes oppositas pertingunt. Ducatur nempe per punctum $M$ recta $Mqrn$ ad partem oppositam, cui parallela agatur $Gh$, ac vocetur $Cq = t$ & $qM = u$; erit, ob triangula $CGh$ & $PMq$ similia, $PM = y = \frac{CG}{Gh}u$, & $qP = x - t = \frac{Ch}{Gh}u$; unde fit $x = t + \frac{Ch}{Gh}u$. Cum autem sit $xy = hh$, fiet $\frac{CG}{Gh}tu + \frac{CG.Ch}{Gh^2}uu = hh$, seu $uu + \frac{Gh}{Ch}tu - \frac{Gh^2}{CG.Ch}hh = 0$.

165. Applicata ergo $u$ habebit duplicem valorem, nempe $qM$ & $-qn$, hoc $qn$ existente negativo quia ad alteram partem Asymtotæ $CP$ pro Axe assumtæ vergit. Harum ergo binarum radicum summa $qM, -qn$ erit $= -\frac{Gh}{Ch}t = -qr$, ideoque $qn - qM = qr$, unde fit $qM = rn$, & $qn = rM$. Deinde autem ex æquatione inventa intelligitur fore radicum productum $-qM.qn = -\frac{Gh^2}{CG.Ch}hh$, seu $qM.qn = qM.rM = rn.qn = rn.rM = \frac{Gh^2}{CG.Ch}hh$. Hæc ergo rectangula, quotcunque rectæ $Mn$ ipsi $Gh$ parallelæ ducantur, perpetuo ejusdem erunt magnitudinis. Hæ autem sunt præcipuæ singularum specierum Linearum secundi ordinis proprietates, quæ, si cum proprietatibus generalibus conferantur, infinita fere insignium proprietatum multitudo conficitur.

## CAPUT VII.

### *De ramorum in infinitum excurrentium investigatione.*

166. Si curva Linea quæcunque habeat ramum seu partem in infinitum excurrentem, atque ex ejus puncto infinite dissito ad Axem quemcunque demittatur Applicata normalis; tum, vel Abscissa $x$ vel Applicata $y$ vel utraque Coordinata, erit infinita. Nisi enim vel alterutra vel utraque esset infinita, tum distantia puncti in Curva assumti ab initio Abscissarum foret finita nempe $= \sqrt{(xx + yy)}$, contra hypothesin. Quam ob rem, si Curva habeat ramum in infinitum excurrentem, vel Abscissæ cuipiam finitæ conveniet Applicata realis infinita, vel Abscissæ infinite magnæ respondebit Applicata realis, sive finita sive infinite magna. Ex hoc igitur fonte Curvarum rami in infinitum excurrentes investigari poterunt.

167. Sit proposita æquatio algebraïca inter Coordinatas $x$ & $y$ cujusvis ordinis, puta $n$; atque seorsim considerentur termini, in quibus variabiles $x$ & $y$ obtinent $n$ dimensiones, qui erunt $\alpha y^n + \beta y^{n-1} x + \gamma y^{n-2} x^2 + \delta y^{n-3} x^3 + \ldots + \zeta x^n$, quæ expressio resolubilis erit in Factores simplices formæ $Ay + Bx$, sive reales sive imaginarios. Atque, si habeat Factores imaginarios, eorum numerus erit par, binique conjuncti dabunt Factorem duplicem realem formæ $A^2 y^2 - 2ABxy \times cos. \varphi + B^2 x^2$. Hujusmodi autem Factor, (sive $x$ sive $y$ sive utraque, ponatur infinita $= \infty$,) semper valorem induet infinitum $= \infty^2$, quia terminus $2ABy x. cos. \varphi$ semper minor est quam duo reliqui $A^2 y^2 + B^2 x^2$, neque enim $A$ nec $B$ potest esse $=$ o. Hujusmodi ergo Factor $A^2 y^2 - 2ABxy. cos. \varphi +$

LIB. II. $B^2 x^2$, si vel $x$ vel $y$ vel utraque ponatur infinita, neque nihilo neque quantitati finitæ, neque etiam quantitati infinitæ $\infty$ potest esse æqualis, cum ipsa fiat $= \infty^2$, quæ infinities major est quam $\infty$.

168. Quod si ergo æquationis pars summa $\alpha y^n + \beta y^{n-1} x + \gamma y^{n-2} x^2 + \ldots\ldots\ldots + \zeta x^n$ nullum habeat Factorem simplicem realem, quod quidem evenire non potest, nisi $n$ sit numerus par, tum ex meris Factoribus duplicibus hujus formæ $A^2 y^2 - 2AB xy. cos. \varphi + B^2 x^2$ constabit. Quare, si vel $x$ vel $y$ vel utraque ponatur infinita, ipsa illa expressio valorem induet infinitum $= \infty^n$: neque igitur quantitati finitæ, neque ulli quantitati infinitæ $\infty^m$, cujus exponens $m$ minor sit quam $n$, æqualis esse potest. Reliqua igitur æquationis membra, in quibus variabiles $x$ & $y$ pauciores habent dimensiones, quoniam infinita præbent minoris exponentis quam $n$, illud supremum infinitum adæquare non possunt; ideoque æquatio consistere non potest, si vel $x$ vel $y$ vel utraque statuatur infinita.

169. Hinc ergo linea Curva, quæ exprimitur æquatione inter Coordinatas $x$ & $y$, cujus supremum membrum nullos habet Factores simplices reales, nullos habebit ramos in infinitum excurrentes, ideoque tota Curva continebitur in spatio finito, instar Ellipsis seu Circuli. Quam ob rem, si in æquatione generali secundi Ordinis $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$, membrum supremum, $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx$, in quo variabiles $x$ & $y$ duas obtinent dimensiones, non habeat Factores simplices reales, quod evenit si $\beta\beta$ sit major quam $4\alpha\gamma$, tum Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, eritque adeo Ellipsis.

170. Quo hæc distinctius evolvere liceat, omnem æquationem inter Coordinatas $x$ & $y$ propositam, ita in membra

distinguamus, ut ad supremum seu primum referamus omnes æquationis terminos, in quibus variabiles $x$ & $y$ eandem summam dimensionem, cujus exponens sit $n$, teneant. Ad secundum vero membrum refero omnes terminos, in quibus variabiles ambæ $n - 1$ dimensiones constituunt. Tertium membrum continebit eos terminos, in quibus ipsorum $x$ & $y$ numerus dimensionum est $n - 2$, & ita porro, donec perveniatur ad membrum ultimum, in quo nulla inest dimensio ipsarum $x$ & $y$, & quod propterea sola quantitate constante constabit. Sit autem $P$ membrum primum seu supremum, $Q$ membrum secundum, $R$ membrum tertium, $S$ quartum & ita porro. 

171. Quoniam igitur, si membrum supremum $P$ nullum habet Factorem simplicem realem, Linea curva, æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ indicata, nullum habet ramum in infinitum excurrentem; ponamus jam membrum supremum $P$ unicum habere Factorem simplicem realem, $ay - bx$, ita ut sit $P = (ay - bx) M$, existente $M$ Functione ipsarum $x$ & $y$, dimensionum $n - 1$, quæ nullos habeat Factores simplices reales. Posita ergo vel $x$ vel $y$ vel utraque infinita, fiet $M = \infty^{n-1}$; $Q$ vero simile poterit esse infinitum, at $R$, $S$, &c., fient infinita minorum graduum. Consequenter æquatio $P + Q + R +$ &c. $= 0$ poterit subsistere, si fuerit $ay - bx =$ quantitati finitæ, vel nihilo, ideoque Curva in infinitum porrigetur.

172. Sit ergo $ay - bx = p$, existente $p$ quantitate finita, quæ ita debet esse comparata ut, Curva in infinitum abeunte, fiat $pM + Q + R + S +$ &c. $= 0$ seu $p = \frac{-Q - R - S\text{\&c.}}{M}$. At, cum $M$ sit quantitas infinita superioris ordinis quam $R$ & $S$ &c., erunt fractiones $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, &c. $= 0$, ideoque $p = \frac{-Q}{M}$. Hanc ob rem fractio $\frac{-Q}{M}$ dabit valorem ipsius $p$, si varia-

LIB. II. biles $x$ & $y$ fiant infinitæ. Cum autem ſit $ay - bx = p$; erit $y = \frac{bx + p}{a}$ & $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax} = \frac{b}{a}$ ob $\frac{p}{ax} = 0$ ſi $x = \infty$. Curva ergo in infinitum abeunte fit $y = \frac{bx}{a}$.

173. Cum igitur $Q$ & $M$ ſint Functiones homogeneæ $n - 1$ dimenſionum, erit $\frac{-Q}{M}$ Functio nullius dimenſionis, ideoque ſi ponatur $y = \frac{bx}{a}$, præbebit valorem conſtantem pro $p$. Vel, quia Functio $\frac{-Q}{M}$ determinatur, ſi tantum ratio inter $y$ & $x$ determinetur, quæ eſt $b : a$, valor ipſius $p$ obtinebitur ſi in expreſſione $\frac{-Q}{M}$, ubique $b$ loco $y$ & $a$ loco $x$ ſcribatur. Invento ergo hoc modo $p$ erit $ay - bx = p$, quæ æquatio in ipſa æquatione propoſita $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ continetur, ſi Curva abeat in infinitum.

174. Portio itaque Curvæ in infinitum extenſa ipſa exprimetur per hanc æquationem $ay - bx = p$; quæ cum ſit pro Linea recta, hæc Linea recta in infinitum producta tandem cum Linea curva confundetur. Erit ergo Linea recta hæc Curvæ aſymtota, quoniam Linea curva in infinitum porrecta cum recta congruet, ideoque continuo propius ad eam accedet. Atque cum æquatio propoſita $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ poſito $x$ vel $y = \infty$, abeat in æquationem $ay - bx = p$, ſimul intelligitur hanc Lineam rectam utrinque in infinitum productam tandem cum Curva congruere. Quam ob rem Linea curva duos habebit ramos in infinitum excurrentes inter ſe oppoſitos, quorum alter cum iſta Linea recta antrorſum, alter cum eadem retrorſum infinite producta conveniet.

175. Cum igitur Curva, ſi æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, membrum ſupremum $P$ unicum habeat Factorem ſimplicem realem, prædita ſit duobus ramis in infinitum extenſis, atque ad eandem Lineam rectam utrinque convergentibus, quæ Linea recta ejus Aſymtota vocatur; nunc ponamus ſupre-

mum membrum $P$ duos habere Factores ſimplices reales $ay-bx$ & $cy-dx$, ita ut ſit $P=(ay-bx)(cy-dx)M$, erit $M$ Functio homogenea $n-2$ dimenſionum. Duo autem caſus hic perpendendi veniunt, prout iſti bini Factores fuerint inter ſe æquales vel inæquales.

176. Sint hi Factores inter ſe inæquales; atque manifeſtum eſt æquationem $(ay-bx)(cy-dx)M+Q+R+S+$ &c. $=0$, duplici modo ſubſiſtere poſſe, pro Abſciſſis vel Applicatis infinitis, vel ſi $ay-bx$ vel ſi $cy-dx$ æquetur quantitati finitæ. Sit igitur $ay-bx=p$; &, cum $p$ ſit quantitas finita, in infinito erit $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, atque ut ante fiet $p=\frac{-Q-R-S-\&c.}{(cy-dx)M}=\frac{-Q}{(cy-dx)M}$, quæ eſt Functio nullius dimenſionis ipſarum $x$ & $y$; quare, ſi ponatur $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$, vel, quod eodem redit, ſi ubique ſcribatur $b$ loco $y$ & $a$ loco $x$, verus prodibit valor conſtantis quæſitæ $p$. Erit ergo $p=\frac{-Q}{(bc-ad)M}$, &, ob Factores inæquales, $bc-ad$ non erit $=0$, neque etiam $M$, quia nullum omnino Factorem realem ſimplicem complectitur, in nihilum abire poteſt; unde valor pro $p$ oritur finitus, vel etiam $=0$, quod evenit, ſi vel membrum $Q$ prorſus deſit, vel Factorem habeat $ay-bx$.

177. Ob ſupremi ergo membri $P$ Factorem realem ſimplicem $ay-bx$, Curva, uti in priori caſu, unam habebit Aſymtotam, cujus poſitio indicatur æquatione $ay-bx=p$. Simili vero modo, ob alterum Factorem $cy-dx$, quoque habebit Aſymtotam, quam præbebit æquatio hæc: $cy-dx=q$, exiſtente $q=\frac{-Q}{(ay-bx)M}$, poſtquam ubique loco $y$ & $x$ hi valores determinati $d$ & $c$ fuerint ſubſtituti. Quocirca Linea curva omnino duas habebit Aſymtotas, ideoque quatuor ramos in infinitum extenſos, qui cum illis rectis tandem congruant. Hic ipſe autem caſus locum ſupra invenit in Hy-

LIB. II. perbola: quare, si in æquatione pro Lineis secundi ordinis $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$ supremum membrum $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx$ duos habeat Factores simplices inæquales reales, quod evenit si $\beta\beta$ superet $4\alpha\gamma$, tum Curva erit Hyperbola.

178. Sint ambo Factores $ay - bx$ & $cy - dx$ inter se æquales ita ut sit $P = (ay - bx)^2 M$. Cum igitur sit $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, erit $(ay - bx)^2 = \frac{-Q - R - S \text{ \&c.}}{M}$. Quia autem est $Q$ Functio $n - 1$; $R$ $n - 2$; & $S$ Functio $n - 3$ dimensionum, ob $M$ Functionem $n - 2$ dimensionum erit, casu infiniti, $\frac{S}{M} = 0$, ideoque $(ay - bx)^2 = \frac{-Q}{M} - \frac{R}{M} = \frac{-Q}{M(\mu y + \nu x)}(\mu y + \nu x) - \frac{R}{M}$. At est $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)}$ & $\frac{R}{M}$ Functio nullius dimensionis ipsarum $x$ & $y$. Quare, cum in infinito sit $y : x = b : a$, si hæc ratio $\frac{b}{a}$ pro $\frac{y}{x}$ seu $b$ pro $y$ & $a$ pro $x$ substituatur, utraque illa Functio abibit in quantitatem constantem.

179. Fiat ergo, facta hac substitutione, $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)} = A$ & $\frac{R}{M} = B$; eritque $(ay - bx)^2 = -A(\mu y + \nu x) - B$, quæ est æquatio pro Linea curva cum qua Linea curva æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ expressa, postquam in infinitum processerit, confundetur. Verum, quia quantitates $\mu$ & $\nu$ sunt arbitrariæ sumatur $\mu = b$ & $\nu = a$, ac, immutandis Coordinatis, fiat $ay - bx = u\surd(aa + bb)$ & $by + ax = t\surd(aa + bb)$, eritque pro eadem illa Curva ista æquatio $uu + \frac{At}{\surd(aa + bb)} + \frac{B}{aa + bb} = 0$, quam patet esse pro Parabola. Curva ergo quæsita ita erit comparata, ut in infinitum protensa cum Parabola confundatur. Habebit ergo duos tantum ramos

ramos in infinitum excurrentes, quorum Asymtota non erit Linea recta, sed Parabola superiore æquatione expressa. CAP. VII.

180. Evenit hoc si non fuerit $A = 0$ : at si sit $A = 0$ (quod evenit si membrum secundum $Q$ vel desit vel divisibile fuerit per $ay - bx$, tum æquatio cessat esse pro Parabola, eritque $uu + \frac{B}{aa+bb} = 0$, cujus tres casus erunt evolvendi. Primo scilicet, si $B$ fuerit quantitas negativa, puta $\frac{B}{aa+bb} = -ff$, æquatio $uu - ff = 0$, duas in se complectetur æquationes $u - f = 0$ & $u + f = 0$, quæ erunt pro duabus Lineis rectis inter se parallelis, quarum utraque erit Curvæ Asymtota, uti casu primo: atque ideo Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes qui cum istis duabus rectis confundentur.

181. Secundus casus est quod sit $B$ quantitas affirmativa, puta $+ff$. Quia vero hoc casu æquatio $uu + ff = 0$ est impossibilis, Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, sed tota in spatio finito continebitur. Non solum igitur Curva, quæ hac æquatione $P + Q + R + S + \&c. = 0$, continetur, nullum habebit ramum in infinitum extensum, si membrum supremum $P$ nullum habeat Factorem simplicem realem, sed etiam idem usu venire potest, quamvis $P$ habeat Factores, uti modo vidimus. Plures autem hujusmodi casus adhuc occurrent.

182. Tertius casus est quo sit etiam $B = 0$, in quem uterque præcedentium incidere potest, ex quo ambiguum est, quomodo Curva futura sit comparata. Hinc ad figuram Curvæ definiendam sequentes termini spectari debebunt. Scilicet, cum sit $P + Q + R + S + \&c. = 0$, atque $P = (ay - bx)^2 M$, in infinito erit $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$; & $(ay - bx)^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \frac{T}{M} + \&c.$. Ponatur ergo, ut ante, facta substitutione $\frac{y}{x} =$

LIB. II. $\frac{b}{a}$, $\frac{Q}{M} = A(by + ax)$, $\frac{R}{M} = B$; tum vero cum $S$, $T$, $V$, &c., fint Functiones $(n-2)$, $(n-3)$, &c. dimenſionum, exiſtente $M$ Functione $(n-1)$ dimenſionum, $\frac{S(by+ax)}{M} = C$; $\frac{T(by+ax)^2}{M} = D$; $\frac{V(by+ax)^3}{M} = E$ &c., erit $(ay-bx)^2 + A(by+ax) + B + \frac{C}{by+ax} + \frac{D}{(by+ax)^2} + \frac{E}{(by+ax)^3}$ + &c. $= 0$. Hæc ergo æquatio exprimit naturam curvæ Lineæ, cujus portio in infinitum diſtans, quæ prodit ſi $by + ax$ ponatur infinitum, conveniet cum Curva in æquatione $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, contenta. Quamvis enim, Curva in infinitum excurrente, $(ay-bx)^2$ valorem obtineat vel finitum vel infinitum ordinis tamen inferioris quam $\infty^2$, tamen $by + ax$ valorem habebit infinitum.

183. Mutemus autem Axem, ad quem Lineam iſtam Aſymtotam inventam referamus, ac in eo ponamus Abſciſſam $\frac{ax+by}{\sqrt{(aa+bb)}} = t$, & Applicatam, $\frac{ay-bx}{\sqrt{(aa+bb)}} = u$; ſitque, brevitatis gratia, $\sqrt{(aa+bb)} = g$, atque erit æquatio $uu + \frac{At}{g} + \frac{B}{gg} + \frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 tt} + \frac{E}{g^5 t^3}$ + &c. $= 0$. Cum igitur in caſu, quem evolvere debemus, ſit $A = 0$, & $B = 0$, fiet $uu + \frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 tt} + \frac{E}{g^5 t^3}$ + &c. $= 0$. Quod, ſi jam non fuerit $C = 0$, poſito $t$ infinito, termini $\frac{D}{g^4 tt} + \frac{E}{g^5 t^3}$ + &c., præ $\frac{C}{g^3 t}$ evaneſcent, eritque $uu + \frac{C}{g^3 t} = 0$; qua æquatione natura Lineæ curvæ continetur, quæ, poſito $t = \infty$, cum Curva quæſita confundetur. Quare, cum hinc ſit $u = \pm\sqrt{\frac{-C}{g^3 t}}$ Curva duos habebit ramos ad eamdem Axis partem utrinque convergentes.

184. Quod ſi inſuper fuerit $C = 0$, tum ſumenda eſt iſta

æquatio $uu + \frac{D}{g^4 tt} = o$, ubi iterum tres casus occurrunt prout $D$ fuerit quantitas affirmativa, vel negativa, vel nulla. Primo casu, ob æquationem impossibilem, Curva nullum habebit ramum in infinitum excurrentem, sed tota continebitur in spatio finito. Secundo casu, si $\frac{D}{g^4} = -ff$ ob $uu = \frac{ff}{tt}$; quia posito tam $t = + \infty$ quam $t = - \infty$, Applicata $u$ duplicem obtinet valorem evanescentem, affirmativum & negativum, Curva habebit quatuor ramos ad Axem utrinque ad utramque partem convergentes. Tertio autem casu, quo $D = o$, sumenda est æquatio $uu + \frac{E}{g^5 t^3} = o$, cujus par est ratio, atque in §. præcedente: sicque consideratio continuari debebit, quoad æquatio $P + Q + R + S +$ &c., terminos ulteriores suppeditat.

185. Ponamus nunc membrum supremum $P$ æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= o$, tres habere Factores simplices reales; atque manifestum est, si isti Factores fuerint inter se inæquales, tum de unoquoque valere ea, quæ supra de unico Factore reali sunt exposita; quo ergo casu Curva habebit sex ramos in infinitum excurrentes, ad tres Lineas rectas Asymtotas convergentes. Si bini Factores fuerint æquales, tum de tertio inæquali idem erit tenendum; quod ante: at de duobus æqualibus eadem præcepta sunt notanda, quæ ante dedimus. Tantum ergo superest casus tertius evolvendus, quo omnes tres Factores sunt inter se æquales. Sit igitur $P = (ay - bx)^3 M$. Et, quia æquatio $P + Q + R + S +$ &c. $= o$, subsistere non potest in infinito, nisi $(ay - bx)^3$ habeat valorem vel finitum, vel infinitum quidem at ordinis inferioris quam $\infty^3$, quo potestas infiniti, in quam membrum supremum $P$ abit, fiat minor quam $\infty^n$; erit utique in infinito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

186. Ad hunc casum exponendum primum spectari oportet membrum secundum $Q$, utrum id Factorem habeat eundem $ay - bx$ an secus: ubi notandum est si omnino desit, tum

LIB. II. in priori contineri, quia nihilum quemcunque Factorem agnoscit. Primum itaque non sit $Q$ per $ay - bx$ divisibile. Et, cum $Q$ sit Fnnctio $n - 1$ dimensionum, $M$ vero Functio $n - 3$ dimensionum, erit $\frac{Q}{(ax+by)^2 M}$ Functio nullius dimensionis, ideoque posito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, abibit in quantitatem constantem, quæ sit $= A$, eritque $(ay - bx)^2 + A(ax + by)^2 = 0$, sequentia enim membra præbebunt terminos, qui in infinito præ $A(ax + by)^2$ evanescunt.

187. Linea igitur curva, quæ hac æquatione exprimitur, ita erit comparata, ut in infinitum producta cum Linea curva æquatione $P + Q + R + S +$ &c., expressa congruat. Ad illam autem proprius cognoscendam, eam ad illum Axem referamus, in quo sit Abscissa $t = \frac{ax + by}{g}$ & Applicata $u = \frac{ay - bx}{g}$ posito $\sqrt{(aa + bb)} = g$, eritque $u^2 + \frac{Att}{g} = 0$, quæ æquatio, si ponatur $t = \infty$, dabit partem Curvæ quæsitæ $P + Q + R +$ &c. $= 0$, in infinito existentem. Quare, si figura Curvæ $u^r + \frac{Att}{g} = 0$, cognita fuerit, simul Curvæ $P + Q + R +$ &c. $= 0$, portionis infinitæ figura erit cognita. In capite autem sequente has Lineas curvas Asymtotas data opera evolvemus.

188. Quod si membrum secundum $Q$ Factorem habeat $ay - bx$; vel simul erit divisibile per $(ay - bx)^2$ vel secus. Ponamus non esse divisibile per $(ay - bx)^2$, ac sumatur ista Functio nullius dimensionis $\frac{Q}{(ay - bx)(ax + by)M}$, quæ, posito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, præbeat istam quantitatem constantem $A$, eritque $(ay - bx)^2 + A(ay - bx)(ax + by) + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} +$ &c. $= 0$. Hic erit $\frac{R}{M}$, posito $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ vel $B(ay - bx)$ vel

$B(ax+by)$, prout $R$ fuerit per $ay-bx$ divisibile vel minus; verum $\frac{S}{M}$ erit quantitas constans $C$. Hinc, ista æquatione ad alium Axem relata, inter Coordinatas $t$ & $u$, ut ante fecimus, ea erit vel $u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bu}{gg}+\frac{C}{g^3}=0$, vel $u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bt}{g^3}+\frac{C}{g^3}=0$. Quia autem tantum casus huc spectat cum $t=\infty$, termini ultimi evanescunt. Eritque ergo priori casu $u^3+\frac{Atu}{g}+\frac{Bu}{gg}=0$, quæ duplicem præbet Asymtotam nempe & $u=0$, & $uu+\frac{At}{g}=0$, alteram rectam, alteram Parabolam. Posteriori casu quoque, existente $t=\infty$, vel $u$ habebit valorem finitum, eritque, ob finita præ infinitis evanescentia, $\frac{Atu}{g}+\frac{Bt}{g^3}=0$, ideoque $u=\frac{-B}{Ag}$ pro Linea recta. Præterea vero $u$ valorem infinitum habere poterit; sicque, evanescente termino tertio, fiet $u^3+\frac{At}{g}=0$, pro Parabola. Quare utroque casu duplex prodit Asymtota, altera recta altera Parabola, ex quo hos casus a se distingui non opus est. CAP. VII.

189. Sit $Q$ etiam per $(ay-bx)^2$ divisibile, atque prout $R$ per $(ay-bx)$ fuerit divisibile vel secus, iisdem, quibus ante, operationibus institutis, prodibunt inter $t$ & $u$ hæ æquationes: vel $u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^3}+\frac{C}{g^3}=0$, vel $u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bt}{g^3}=0$. Prior casus est pro tribus Lineis rectis inter se parallelis, si quidem omnes æquationis $u^3+\frac{Au^2}{g}+\frac{Bu}{g^3}+\frac{C}{g^3}=0$ radices fuerint reales, vel pro unica recta Asymtota, si duæ radices fuerint imaginariæ. Hinc vero varietates nascuntur prout trium istarum Asymtotarum inter se parallelarum vel

 binæ vel omnes coincidunt. Posterior autem casus $u^3 + \frac{Au}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$, posito $t = \infty$, locum habere nequit nisi $u$ sit infinitum, ideoque terminus $\frac{Au^2}{g}$ præ primo $u^3$ evanescet, eritque $u^3 + \frac{Bt}{g^2} = 0$, æquatio pro Asymtota curvilinea ordinis tertii.

190. Sin autem fuerit $A = 0$, $B = 0$, & $C = 0$, tum recurrendum est ad terminos æquationis $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$ sequentes, qui præbebunt hujusmodi æquationem $u^3 + \frac{D}{g^4 t} + \frac{E}{g^5 t^2} + \frac{F}{g^6 t^3} +$ &c. $= 0$, in qua, nisi sit $D = 0$, tertius cum sequentibus evanescit, ut sit $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$; sin & $D = 0$, erit $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$; &, si etiam $E = 0$, erit $u^3 + \frac{F}{g^6 t^3} = 0$, &c., quæ æquationes Lineas curvas denotant, quæ, posito $t = \infty$, cum Curva in æquatione $P + Q + R +$ &c. $= 0$, contenta congruant. Istæ autem æquationes, quia inest potestas impar $u^3$, semper sunt reales, ideoque certo ramos in infinitum excurrentes, declarant. Interim tamen pro his iisdem casibus Linea recta æquatione $u = 0$, expressa quoque erit Asymtota, quia est Asymtota Curvarum $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$, $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$ &c.

191. Cum igitur rami Curvarum ad Asymtotam rectam convergentes tantopere discrepare queant, convenit hanc diversitatem diligentius perpendere, quod fiet, si Linea curva simplicissima definiatur, quæ ad eandem Asymtotam rectam relata cum Curva proposita confundatur. Sic, etsi æquatio $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, si radices omnes habeat reales, tres ostendit Asymtotas rectas inter se parallelas, tamen nondum

patet utrum crura Curvæ in infinitum extenſa ſint Hyperbolica, hoc eſt æquatione $u = \frac{C}{t}$ expreſſa, an alius generis, veluti æquatione $u = \frac{C}{tt}$, vel $u = \frac{C}{t^3}$ &c., expreſſa. Ad hoc cognoſcendum ſumatur ſequens proximus terminus quem æquatio ſuggerit, nempe $\frac{D}{g^2 t}$, vel, ſi hic deſit, $\frac{E}{g^2 t^2}$, vel etiam, hoc deficiente, $\frac{F}{g^2 t^3}$. Sumamus, ut rem generaliter abſolvamus, terminum ſequentem eſſe $\frac{K}{t^k}$: atque ex natura æquationis $P + Q + R + \&c. = 0$, quæ eſt $n$ dimenſionum, patet $k$ non poſſe eſſe numerum majorem quam $n - 3$. Sint æquationis $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, radices ſeu Factores $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)$, eritque $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) - \frac{K}{t^k} = 0$. Sit $u - \alpha = \frac{I}{t^\mu}$, quæ æquatio exprimet naturam unius Aſymtotæ, eritque $\frac{I}{t^\mu}(\alpha - \beta + \frac{I}{t^\mu})(\alpha - \gamma + \frac{I}{t^\mu}) = \frac{K}{t^k}$; &, poſito $t$ infinito, fit $\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) I}{t^\mu} = \frac{K}{t^k}$.

192. Æquatio hæc obtinet, ſi radix $\alpha$ fuerit inæqualis reliquis radicibus $\beta$ & $\gamma$, hocque caſu fiet $I = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$ & $\mu = k$, unde radix $u = \alpha$ ſuppeditabit iſtam Aſymtotam Curvilineam $u - \alpha = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) t^k}$. Si ergo omnes tres radices fuerint inter ſe inæquales ſingulæ hujuſmodi Aſymtotas præbebunt. Sin autem duæ radices ſint æquales,

LIB. II. puta $\zeta = \alpha$, binæ Asymtotæ coalescent in unam, eritque $\frac{\Gamma(\alpha - \gamma)}{t^{2\mu}} = \frac{K}{t^k}$, unde fit $\Gamma = \frac{K}{\alpha - \gamma}$ & $2\mu = k$. Quare hujus duplicis Asymtotæ natura exprimetur hac æquatione $(u - \alpha)^2 = \frac{K}{(\alpha - \gamma)t^k}$. Si omnes tres radices fuerint æquales, ideoque tres Asymtotæ in unam concrescant, ejus natura exprimetur hac æquatione $(u - \alpha)^3 = \frac{K}{t^k}$.

193. Quod si æquationis $P + Q + R + S +$ &c., supremum membrum $P$ quatuor habeat Factores simplices reales, si ii fuerint vel omnes inæquales inter se, vel bini æquales, vel etiam tres æquales, ex antecedentibus natura ramorum in infinitum excurrentium una cum Asymtotis colligetur. Unicus ergo casus, quo omnes radices sunt inter se æquales, explanatione indiget. Sit igitur $P = (ay - bx)^4 M$, ut sit $M$ Functio $n - 4$ dimensionum; atque, si in Functionibus nullius dimensionis, uti supra, ponatur $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, ut præbeant quantitates constantes, simulque ponatur, mutato Axe, $t = \frac{ax + by}{g}$ & $u = \frac{ay - bx}{g}$, existente $g = \surd(aa + bb)$, pro Lineis Asymtotis sequentes inter $t$ & $u$ orientur æquationes. Primum scilicet, si $Q$ non fuerit divisibile per $ay - bx$, habebitur $u^4 + \frac{At^3}{g} = 0$,

194. Deinde, si $Q$ sit divisibile quidem per $(ay - bx)$ at non per $(ay - bx)^2$, prodibit $u^4 + \frac{Attu}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, in qua, posita $t = \infty$, Applicata $u$ potest esse vel quantitas finita vel infinita, ergo duplex prodit Asymtota, recta scilicet $u + \frac{B}{gA} = 0$, & Curva $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$. Quod ad rectam attinet, ad eam propius cognoscendam sumatur terminus sequens proximus,

ximus, qui sit $\frac{K}{k}$, ac reperietur $u + \frac{B}{gA} + \frac{gK}{At^{k+2}} = 0$, 
quæ est æquatio pro Curva, cujus pars respondens Abscissæ $t = \infty$ cum Curva quæsita confundetur.

195. Sit nunc $Q$ divisibile per $(ay - bx)^4$ at non per $(ay - bx)^5$, videndum est utrum $R$ sit divisibile per $ay - bx$ an secus. Priori casu prodibit $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btu}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = 0$; posteriori vero $u^4 + \frac{Atu}{g} + \frac{Btt}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = 0$. Prior casus duplicem dat æquationem, prout $u$ est finitum aut infinitum, ideoque resolvitur in has duas æquationes $uu + \frac{Bu}{gA} + \frac{C}{ggA} = 0$, & $u^2 + \frac{At}{g} = 0$; quarum illa, si radices habet ambas reales & inæquales, præbet duas rectas parallelas, sin autem radices sint imaginariæ, nullum ostendit ramum in infinitum excurrentem: hæc vero $u^2 + \frac{At}{g} = 0$, dat Parabolam Asymtotam. Posterior æquatio $u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, (ob evanescentem $\frac{Ct}{g^3}$ præ $\frac{Btt}{gg}$, facto $t = \infty$,) duas continet æquationes formæ $uu + \alpha t = 0$, ideoque duæ prodeunt Parabolæ Asymtotæ, si fuerit $A^2$ major quam $4B$, quæ in unam coeunt si $A^2 = 4B$, at penitus imaginariæ evadunt si $A^2$ minor quam $4B$, quo casu nullus Curvæ ramus in infinitum excurrens designatur.

196. Sit jam $Q$ divisibile per $(ay - bx)^5$; atque, prout $R$ & $S$ fuerint divisibilia vel non per $ay - bx$, obtinebuntur sequentes æquationes.

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Cu}{g^3} + \frac{D}{g^4} = 0$$
$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$
$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{But}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$
$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$$

Harum æquationum prima eſt pro quatuor rectis inter ſe parallelis, ſi quidem omnes radices fuerint reales & inæquales, radices autem æquales duas pluresve in unam colligent. At vero radices imaginariæ penitus vel duas omnes e medio tollunt. In æquatione ſecunda, ob $t = \infty$, Applicata $u$ non poteſt non eſſe infinita, eritque ergo $u^4 + \frac{Ct}{g^3} = 0$, Aſymtota Curva quarti ordinis. Ex æquatione tertia finitum valorem habere poteſt $u + \frac{C}{gB} = 0$, præterea vero habet hanc $u^3 + \frac{Bt}{gg} = 0$, Lineam tertii ordinis pro Aſymtota. Denique æquatio quarta, ob $u$ infinitum ſi $t = \infty$, abit in $u^4 + \frac{Btt}{gg} = 0$, quæ æquatio, ſi $B$ eſt quantitas affirmativa, eſt impoſſibilis, ſin negativa deſignat duas Parabolas ad Verticem oppoſitas, quæ in infinitum productæ cum Curva confundentur.

197. Ex his igitur jam via patet, qua ulterius progredi liceet, ſi plures Factores ſimplices ſupremi membri $P$ inter ſe fuerint æquales. Quod enim ad Factores inæquales attinet, eorum quiſque ſeorſim conſiderari atque Linea recta Aſymtota ex eo nata definiri poteſt. Sin autem duo Factores fuerint æquales, tum per ea, quæ §. §. 178. *& ſequentibus* ſunt tradita, indoles Curvæ definiri poteſt; Similique modo pro tribus Factoribus æqualibus negotium conficient §. §. 185. *& ſequentes*; atque caſum, quo quatuor Factores ſunt æquales, modo

evolvimus, ex quo simul plurium Factorum æqualitas tractari potest. Ceterum, hinc perspicitur quanta multiplicitas ac varietas in Lineis curvis tantum ratione ramorum in infinitam excurrentium locum habere queat; varietatem enim, quæ in spatio finito inesse potest, nondum attigimus. 

## CAPUT VIII.

### *De Lineis Asymtotis.*

198. In Capite præcedente vidimus plures dari Asymtotarum species, præter Lineam rectam enim invenimus plures Lineas curvas Asymtotas hac æquatione $u^\mu = Ct^\nu$ expressas. Atque ipsa Linea recta suppeditavit alias Asymtotas Curvilineas, cum quibus Linea curva magis convergat, quam cum Linea recta. Quoties autem Linea recta reperitur esse Asymtota cujuspiam Curvæ, toties Linea curva eandem rectam pro Asymtota habens assignari poterit, quæ etiam sit Asymtota Curvæ propositæ. Hujusmodi autem Asymtota Curvilinea multo accuratius exprimit indolem Curvæ, cujus est Asymtota; ostendit enim simul ramorum numerum cum recta convergentium, atque plagam, utrum supra an infra, an antrorsum retrorsumve ad rectam appropinquent.

199. Hæc igitur infinita Asymtotarum varietas commodissime in ordinem digereretur, si ipsum fontem, unde eas sumus adepti, sequamur. Alias scilicet Asymtotas præbent singuli membri supremi Factores inter se inæquales, alias bini Factores æquales, alias terni æquales, alias quaterni, & ita porro. Sit itaque proposita æquatio cujusque ordinis $n$ inter Coordinatas $x$ & $y$, quæ sit $P + Q + R + S +$ &c. $= 0$, ubi $P$ sit membrum supremum continens omnes terminos $n$ dimensionum, $Q$ sit membrum secundum continens terminos $n - 1$

LIB. II. dimenſionum, ſimilique modo $R$ tertium, $S$ quartum, & ita porro.

TAB. X. Fig. 35. 200. Sit jam $ay - bx$ Factor ſimplex ipſius $P$, cui alius ſimilis non adſit; ac ponatur $P = (ay - bx)M$, eritque $M$ Functio homogenea $n - 1$ dimenſionum non diviſibilis per $ay - bx$. Sit nimirum $AZ$ Axis, in quo ſit Abſciſſa $AP = x$ & Applicata $PM = y$. Quo Factor $ay - bx$ ſuccinctius exprimatur, ſumatur alia recta $AX$ pro Axe ſecans priorem in ipſo Abſciſſarum initio $A$ & faciens angulum $XAZ$, cujus tangens $= \frac{b}{a}$, ideoque ſinus $= \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & coſinus $= \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$. In hoc Axe ponatur Abſciſſa $AQ = t$, & Applicata $QM = u$; erit, ductis $Pg$, $Pf$ novis Coordinatis $u$ & $t$ parallelis, $Pg = Qf = \frac{bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Ag = \frac{ax}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Mf = \frac{ay}{\sqrt{(aa+bb)}}$; $Pf = Qg = \frac{by}{\sqrt{(aa+bb)}}$; ideoque $t = Ag + Qg = \frac{ax+by}{\sqrt{(aa+bb)}}$; & $u = Mf - Qf = \frac{ay-bx}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Erit ergo nunc Applicata $u$ Factor ſupremi membri $P$.

201. Ex his erit viciſſim $y = \frac{au+bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & $x = \frac{at-bu}{\sqrt{(aa+bb)}}$; qui valores ſi in æquatione $P + Q + R +$ &c. $= 0$, ſubſtituantur, prodcbit æquatio pro Curva eadem ad Axem $AX$ relata, inter $t$ & $u$. Ut autem coëfficientium multitudinem evitemus, ſuſtineant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, &c. loca omnium coëfficientium; ac, facta ſubtitutione, ſingulæ litteræ ſequentes valores induent.

$$M = \alpha t^{n-1} + \alpha t^{n-2} u + \alpha t^{n-3} u^2 + \&c.$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \&c.$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \&c.$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \&c.$$
$$T = \epsilon t^{n-4} + \epsilon t^{n-5} u + \epsilon t^{n-6} u^2 + \&c.$$
&c.

Quia autem, ad Asymptotam inveniendam, Abscissam $t$ infinitam statui oportet in quovis membro omnes termini præ primo evanescent. Quare, si cujusvis terminus primus adsit, sequentes negligi possunt; sin primus desit, capiatur secundus; sin primus & secundus desint, a tertio erit incipiendum.

202. Quia $u$ non dividit Functionem $M$, ejus primus terminus deesse non potest: fiet ergo $\alpha t^{n-1} u + \beta t^{n-1} = 0$, unde pro $u$ oritur valor finitus, qui sit $= c$: hoc est recta Axi $AX$ parallela ab eoque intervallo $c$ distans erit Asymtota. Jam, ad Asymtotam curvilineam magis ad ipsam Curvam accedentem, inveniendam, ponatur ubique, præterquam in primo termino, $u = c$, ac reperietur hæc æquatio $\alpha t^{n-1} u + \beta t^{n-1} + t^{n-2} (\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3} (\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$; vel, ob $\alpha u + \beta = u - c$, erit $(u-c) t^{n-1} + t^{n-2} (\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3} (\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \&c. = 0$. Nisi jam terminus secundus desit, omnes sequentes negligi possunt, fietque $(u - c) + \frac{A}{t} = 0$; si secundus desit, tertius sumatur, eritque $(u - c) + \frac{A}{tt} = 0$. Tertio vero etiam deficiente, fiet $(u - c) + \frac{A}{t^3} = 0$, & ita porro. Si omnes, præter ultimum constantem, deficiant, erit

LIB. II. $(u - c) + \frac{A}{t^{n-1}} = 0$. Prorsus autem omnes si deessent, tota æquatio divisibilis foret per $u = c$, ideoque ipsa recta $u - c = 0$, foret Curvæ portio.

203. Si ponatur $u - c = z$; seu, si Abscissæ in ipsa Asymtota recta capiantur, omnes Asymtotæ curvilineæ, quas unicus supremi membri Factor suppeditat, in hac æquatione generali comprehenduntur $z = \frac{C}{t^k}$, denotante $k$ numerum quemvis integrum exponente $n$ minorem. Quemadmodum ergo hæ Asymtotæ curvilineæ sint comparatæ, si Abscissa $t$ ponatur infinita, videamus. Sit ergo $XY$ Asymtota recta pro Axe sumta, & $A$ initium Abscissarum; ducta recta $CD$ orientur quatuor regiones, quas litteris P, Q, R & S designemus. Sit nunc primum $z = \frac{C}{t}$: &, quia sumptos $t$ nagativo, fit $z$ quoque negativa, Curva duos habebit ramos $EX$ & $FY$ in regionibus oppositis P & S ad rectam $XY$ convergentes. Idem eveniet, si $k$ fuerit numerus quicunque impar. At, si fuerit $k = 2$, seu $z = \frac{C}{tt}$, quia, sive $t$ statuatur affirmativa sive negativa, $z$ perpetuo affirmativa manet, Curva constabit duobus ramis $EX$ & $FY$ in regionibus P & Q ad rectam $XY$ convergentibus; quod idem contingit, si $k$ fuerit numerus par quicunque, hoc tantum discrimine, quod convergentia eo fiat promptior, quo major sit exponens $k$.

TAB. X. Fig. 36.

TAB. X. Fig. 37.

204. Habeat supremum membrum $P$ binos Factores $ay - bx$ inter se æquales; atque facta eadem, qua ante, ad alium Axem translatione, fiet

CAP. VIII.

$$P = \qquad\qquad + \alpha t^{n-2} u^2 + \alpha t^{n-3} u^3 + \&c.$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2} u + \beta t^{n-3} u^2 + \beta t^{n-4} u^3 + \&c.$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3} u + \gamma t^{n-4} u^2 + \gamma t^{n-5} u^3 + \&c.$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4} u + \delta t^{n-5} u^2 + \delta t^{n-6} u^3 + \&c.$$
&c.

Hinc, prout primus membri $Q$ terminus affuerit, five minus, duæ oriuntur æquationes

I.

$$\alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-1} = 0$$

feu

$$\alpha u^2 + \beta t = 0$$

II.

$$\alpha t^{n-2} u^2 + \beta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0$$

feu

$$\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0.$$

Quod fi ergo prima æquatio $\alpha u^2 + \beta t = 0$, locum habet, Afymtota fit Parabola, cum cujus ambobus ramis duo Curvæ rami in infinito confundentur. Curva ergo in binis regionibus P & R ramos habebit cum Parabola $EAF$ denique congruentes. TAB. X. Fig. 38.

205. Sin autem altera æquatio $\alpha uu + \beta u + \gamma = 0$, refultet, tum videndum eft an habeat duas radices reales an fecus. Pofteriori cafu enim hac æquatione nulli prorfus rami in infinitum excurrentes denotantur. Sint ergo ambæ radices reales & inæquales, altera $u = c$, altera $u = d$, atque Curva duas habebit Afymtotas rectas inter fe parallelas. Cujufnam vero utraque fit indolis, ut ante, inveftigabimus; fcilicet cum fit $\alpha uu + \beta u + \gamma = (u - c)(u - d)$, ponatur ubique $u = c$, præterquam in Factore $u - c$, ac prodibit $(c - d)t^{n-2}$

 $(u-c)+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+$ &c. $=0$. Nisi ergo secundus terminus evanescat, sequentes omnes, posito $t=\infty$, evanescent, eritque Asymtota $(u-c)+\frac{A}{t}=0$; si terminus secundus evanescat, fiet $(u-c)+\frac{A}{t^2}=0$, atque ita porro. Si omnes termini, præter ultimum constantem, fuerint $=0$, erit $(u-c+\frac{A}{t^{n-2}}=0$, quarum Curvarum figuras si $t=\infty$, jam supra omnes descripsimus.

206. At, si ambæ radices æquationis $\alpha uu+\beta u+\gamma=0$. fuerint æquales, seu $\alpha uu+\beta u+\gamma=(u-c)^2$, quia $u=c$, si hic valor in reliquis terminis substituatur, prodibit ista æquatio, $t^{n-2}(u-c)^2+t^{n-3}(\alpha c^3+\beta c^2+\gamma c+\delta)+t^{n-4}(\alpha c^4+\beta c^3+\gamma c^2+\delta c+\varepsilon)+$ &c. $=0$: unde, prout, excepto primo, vel non desit secundus, vel non desit tertius deficiente primo, vel non quartus deficientibus secundo & tertio, sequentes oriuntur æquationes pro Asymtotis;

$$(u-c)^2+\frac{A}{t}=0;$$
$$(u-c)^2+\frac{A}{tt}=0;$$
$$(u-c)^2+\frac{A}{t^3}=0;$$
usque ad
$$(u-c)^2+\frac{A}{t^{n-2}}=0;$$

Si omnes termini præter ultimum constantem desint. Verum si etiam ultimus evanesceret, foret $(u-c)^2=0$, ideoque Linea recta ipsa foret Curvæ portio, Curvaque adeo complexa.

207. Quanquam sic omnes casus, quos duo Factores æquales præbeant,

præbeant, enumerati videntur, tamen ultima æquatio alias adhuc induere poteſt formas, unde diverſæ Aſymtotæ ſequuntur. Evenit hoc, ſi Factor poteſtatis $t^{n-3}$ per $u-c$ diviſibilis deprehendatur: tum enim, uti in primo termino, relinquatur $u-c$ ac adjiciatur inſuper terminus ſequens qui proxime adeſt, hocque caſu ejuſmodi emergent æquationes

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{tt}=0$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^3}=0$$

uſque ad

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Sin autem ſecundus terminus penitus deſit, vel per $(u-c)^2$ diviſibilis fuerit, tum ſpectetur terminus tertius, qui ſi per $u-c$ diviſibilis deprehendatur, in eo $u-c$ relinquatur, atque præterea ſequens proximus terminus adjungatur. Hocque caſu ejuſmodi orientur æquationes

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^3}=0$$

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^4}=0$$

uſque ad

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{tt}+\frac{B}{t^{n-2}}=0.$$

Quod ſi etiam tertius terminus deſit, & quartus per $u-c$ diviſibilis reperiatur, vel etiam hoc deficiente quintus, & ita porro, naſcetur hujuſmodi æquatio pro Curva Aſymtota,

$$(u-c)^2+\frac{A(u-c)}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0,$$

 ubi exponens $p$ ſemper minor erit quam $q$, & $q$ minor quam $n-1$.

208. Ponamus $u-c=z$, atque hæ æquationes omnes in hac forma $zz-\frac{Az}{t^p}+\frac{B}{t^q}=0$, continentur. Ad quam evolvendam tres caſus ſunt ſpectandi, prout fuerit $q$ major quam $2p$, vel $q$ æqualis $2p$, vel $q$ minor quam $2p$.

Caſu primo, quo $q$ ſuperat $2p$; duæ æquationes in illa continentur, $z-\frac{A}{t^p}=0$, & $Az-\frac{B}{t^{q-p}}=0$: utraque enim, facto $t=\infty$, ſatisfacit. Nam, poſito $z=\frac{A}{t^p}$, æquatio ſuperior abit in $\frac{A^2}{t^{2p}}-\frac{AA}{t^{2p}}+\frac{B}{t^q}$, ſeu $A^2-A^2+\frac{B}{t^{q-2p}}=0$, quod, ob $q$ majorem quam $2p$, verum eſt, erit autem $p$ minor quam $\frac{n-2}{2}$.

At, ſi $z=\frac{B}{At^{q-p}}$, fiet $\frac{BB}{A^2t^{2q-2p}}-\frac{B}{t^q}+\frac{B}{t^q}$, ſeu $\frac{BB}{A^2t^{q-2p}}-B+B=0$, quod verum eſt ob terminum primum evaneſcentem facto $t=\infty$. Hoc ergo caſu ſuper, eadem Aſymtota recta duæ habentur Aſymtotæ curvilineæ, ideoque quatuor rami in infinitum ex currentes.

Secundus caſus, quo $q=2p$, præbet æquationem $zz-\frac{Az}{t^p}+\frac{B}{t^{2p}}=0$, quæ, vel eſt imaginaria, ſi $AA$ minor quam $4B$, quo caſu nulla Aſymtota extat, vel duas præbet Aſymtotas ſimiles $z=\frac{C}{t^p}$, ſi $AA$ major quam $4B$.

In tertio caſu, ſi $q$ minor quam $2p$, æquationis medius terminus

ſemper evaneſcit, poſito $t = \infty$; eritque ergo $zz + \frac{B}{t^q} = 0$, æquatio pro una Aſymtota. Formas quidem præcedentium Aſymtotarum jam expoſuimus, quare iſtas Aſymtotas hac forma $zz = \frac{C}{t^k}$ contentas examinemus.

209. Si igitur Axis in ipſa Aſymtota recta $u = c$ ſumatur, & Applicata $u - c$ ponatur $= z$, omnes illæ Aſymtotæ curvilineæ continebuntur in hac æquatione $zz = \frac{C}{t^k}$, denotante $k$ numerum integrum minorem quam $n - 1$. Harum autem Curvarum rami in infinitum excurrentes, ſeu facto $t = \infty$, ita ſe habebunt. Si $k = 1$, ſeu $zz = \frac{C}{t}$, quia $t$ negativum fieri nequit, Curva duos habebit ramos $EX$ & $FX$ in regionibus P & R in infinitum excurrentes, quod idem eveniet ſi fuerit $k$ numerus quicunque impar. At, ſi ſit $k$ numerus par, ut 2, ſeu $zz = \frac{C}{tt}$, primum diſpiciendum eſt utrum $C$ ſit quantitas negativa an affirmativa. Priori caſu æquatio realis eſſe nequit, ideoque Curva hinc nullum habebit ramum in infinitum extenſum. Poſteriori caſu Curva quatuor habebit ramos in infinitum excurrentes & cum Aſymtota $XY$ concurrentes, ſcilicet $EX$, $FX$, $GY$, & $HY$ in omnibus quatuor regionibus P, Q, R, & S diſperſos.

TAB. X. Fig. 39.

TAB. XI. Fig. 40.

210. Ponamus ſupremum membrum æquationis $P$ habere tres Factores æquales, atque æquatione ad Coordinatas $t$ & $u$ reducta, ut ſit $u^3$ iſte Factor triplex ipſius $P$, erit.

$$P = \ldots\ldots\ldots + \alpha t^{n-3}u^3 + \alpha t^{n-4}u^4 + \&c.$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \beta t^{n-5}u^4 + \&c.$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \gamma t^{n-6}u^4 + \&c.$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \delta t^{n-7}u^4 + \&c.$$
&c.

 Hinc, pro diversis constitutionibus membrorum $Q$ & $R$, sequentes oriuntur æquationes.

I.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-1} = 0$$

II.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-2} u + \gamma t^{n-2} = 0$$

III.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-2} = 0$$

IV.

$$\alpha t^{n-3} u^3 + \beta t^{n-3} u^2 + \gamma t^{n-3} u + \delta t^{n-3} = 0.$$

TAB. XI. *Fig.* 41. 211. Prima æquatio abit in $\alpha u^3 + \beta t^2 = 0$, ideoque hæc Asymtota est Linea tertii ordinis, cujus talis erit figura, si Abscissæ $t$ super Axe $XY$ a puncto $A$ sumantur. Duos scilicet habebit ramos $E$ & $F$ in regionibus P & Q in infinitum excurrentes.

Secunda æquatio ita se habet $\alpha u^3 + \beta t u + \gamma t = 0$. Ex qua $u$, posito $t = \infty$, duplicem valorem habere potest, vel finitum vel infinitum, ideoque in has duas æquationes resolvitur $\beta u + \gamma = 0$ & $\alpha u u + \beta t = 0$, posterior est pro Parabola, uti ante vidimus, ac propterea Curva habebit duos ramos in infinitum extensos ad Parabolam appropinquantes. Prior vero æquatio præbeat $u - c = 0$, quæ est pro Linea recta Asymtota, cujus indoles perspicietur si, præterquam in $\beta u + \gamma = u - c$, ubique loco $u$ scribatur $c$; eritque ergo, $t^{n-2}(u-c) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \epsilon) +$ &c. $= 0$; unde, uti supra, sequitur fore vel $(u = c) + \frac{A}{t} = 0$, vel $(u - c) + \frac{A}{tt} = 0$, &c.. Ultima vero æquatio, quæ oriri potest, est $(u-c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$. Hoc ergo casu Curva duplicem habebit Asym-

totam, alteram rectam indolis hic declaratæ, alteram vero Parabolam conjunctim. CAP. VIII.

212. Tertia æquatio $\alpha u^3 + \zeta u^2 + \gamma t = 0$, posito $t = \infty$, subsistere nequit, nisi sit $u = \infty$; ideoque terminus $\zeta u^2$ præ $\alpha u^3$ evanescit, proditque ista æquatio tertii ordinis $\alpha u + \gamma t = 0$, pro Asymtota, cujus hæc est figura, ut in regionibus oppositis P & S duos habeat ramos $AE$ & $AF$ in infinitum excurrentes. TAB. XI. Fig. 42.

Quarta æquatio autem $\alpha u^3 + \zeta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, vel unam vel tres Asymtotas rectas inter se parallelas exhibet, nisi duæ vel omnes inter se sint æquales, ad quarum indolem indagandam sit primum $u = c$, radix æquationis una aliam sui similem non habens, sitque $\alpha u^3 + \zeta u^2 + \gamma u + \delta = (u - c) \times (fu^2 + gu + h)$. Ponatur ubique $u = c$, præterquam in hoc Factore $u - c$, ac prodibit hujusmodi æquatio $t^{n-3}(u-c) + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} + \&c. = 0$; unde Asymtota orietur formæ $u - c = \frac{K}{t^k}$, existente $k$ numero minore quam $n - 2$.

213. Si æquationis $\alpha u^3 + \zeta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, duæ radices fuerint æquales, ita ut ea expressio sit $= (u - c)^2 \times (fu + g)$; atque, statuendo $u = c$, nisi in quopiam membro fuerit Factor $u - c$, ad hujusmodi æquationem pervenietur $(u - c)^2 + \frac{A(u-c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$, ubi erit $q$ minor quam $n - 2$, & $p$ minor quam $q$, quem casum ante evolvimus. Superest ergo casus, quo æquatio $\alpha u^3 + \zeta u^2 + \gamma u + \delta = 0$, tres habet radices reales, puta $(u - c)^3$, atque hujusmodi obtinebitur æquatio $(u - c)^3 t^{n-3} + P t^{n-4} + Q t^{n-5} + R t^{n-6} + S t^{n-7} + \&c. = 0$. Quod si $P$ non fuerit divisibile per $u - c$, ponatur $u = c$, fietque

$(u - c)^3 + \frac{A}{t} = 0$. Sin autem $P$ divisorem habeat $u - c$ semel, ponatur ubique, præterquam in hoc Factore, $u = c$, atque orietur æquatio hujus formæ $(u - c)^3 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{B}{t^q} = 0$, existente $q$ numero minore quam $n - 2$; est vero $\frac{B}{t^q}$ terminus secundum proxime sequens, qui non evanescit facto $u - c$. Sin $P$ adeo per $(u - c)^2$ fuerit divisibilis, $Q$ vero non habeat Factorem $u - c$, orietur æquatio hujus formæ $(u - c)^3 + \frac{A(u-c)^2}{t} + \frac{B}{tt} = 0$. Quod si autem secundus adeo per $(u - c)^2$ fuerit divisibilis, tum ordine procedendum est, donec ad terminum perveniatur non divisibilem per $(u - c)^2$, qui si fuerit divisibilis per $(u - c)$, ulterius est progrediendum, donec ad terminum non divisibilem per $u - c$, perveniatur. Sin autem ille terminus per $(u - c)^2$ divisibilis fuerit, procedatur ulterius donec perveniatur ad terminum vel non divisibilem per $u - c$ vel divisibilem. Priori casu æquatio terminetur, posteriori ulterius pergatur donec ad terminum non divisibilem per $(u - c)$ perveniatur. Sic itaque obtinetur semper æquatio in hac forma generali contenta $(u - c)^3 + \frac{A(u-c)^2}{t^p} + \frac{B(u-c)}{t^q} + \frac{C}{t^r} = 0$, ubi erit $r$ minor quam $n - 2$; $q$ minor quam $r$, & $p$ minor quam $q$.

214. In hac æquatione vel tres continentur æquationes formæ $(u - c) = \frac{K}{t^k}$; vel una hujusmodi & una $(u - c)^2 = \frac{K}{t^k}$; vel unica tantum formæ $(u - c)^3 = \frac{K}{t^k}$: quod postremum evenit si fuerit & $3p$ major quam $r$ & $3q$ major quam

214. Tum vero etiam fieri poteſt ut duæ æquationes fiant imaginariæ, quæ ergo nullam Aſymtotam indicabunt. Ceterum formas harum Aſymtotarum jam explicavimus præter ultimam æquatione $(u-c)^2 = \frac{K}{t^k}$ contentam. Præbet autem iſta æquatio, ſi $k$ ſit numerus impar, formam Figurâ trigeſimâ ſextâ deſignatam, cum duobus ramis $EX$ & $FY$ in regionibus oppoſitis P & S in infinitum excurrentibus. Sin autem $k$ ſit numerus par, orietur forma Figura trigeſima ſeptima repræſentata in qua ſunt duo rami $EX$ & $FY$ ad eandem Aſymtotæ rectæ $XY$ partem, ſeu in regionibus P & Q excurrentes.

CAP. VIII.

TAB. X. Fig. 36.

TAB. X. Fig. 37.

215. Quoniam ex his facile perſpicitur, quemadmodum Aſymtotarum forma, ſi quatuor pluresve Factores ſimplices in membro æquationis ſupremo fuerint æquales, inveſtigari debeat, ulterius hic non progredior; verum hoc Caput applicatione regularum datarum ad unum exemplum finiam.

EXEMPLUM.

*Sit igitur propoſita Linea curva hac æquatione expreſſa* $y^3xx \times (y-x) - xy(yy+xx) + 1 = 0$, *cujus ſupremum membrum* $y^3xx(y-x)$ *unum Factorem habet ſolitarium*, $y-x$, *duos æquales* $xx$, *& inſuper tres æquales* $y^3$.

Conſideremus primum Factorem ſimplicem $y-x$; ex quo, poſito $y=x$, fiet $y-x-\frac{2}{x}=0$; &, ob $x=\infty$, erit $y-x=0$, quæ eſt æquatio pro Aſymtota rectilinea $BAC$ cum Axe $XY$ in initio Abſciſſarum faciens angulum ſemirectum $BAY$. Ad hanc Lineam transferatur tanquam ad Axem æquatio, quod fiet ponendo $y=\frac{u+t}{\sqrt{2}}$ & $x=\frac{t-u}{\sqrt{2}}$; quo facto orietur hæc æquatio $\frac{(u+t)(tt-uu)^2u}{4} + \frac{(tt-uu)(tt+uu)}{2} + 1 = 0$: unde, per 4 multiplicando, fiet

TAB. XI. Fig. 43.

$$0 = t^5u + t^4uu - 2t^3u^3 - 2ttu^4 + tu^5 + u^6$$
$$- 2t^4 \qquad\qquad + 2u^4$$
$$+ 4$$

ex hac æquatione, facto $t = \infty$, invenitur $u = 0$; ideoque reliqui termini, præter hos duos $t^5u - 2t^4$, evanefcunt; unde pro Afymtota curvilinea erit $u = \frac{2}{t}$. Ob hunc ergo Factorem Curva quæfita duos habebit ramos $bB$, $cC$ in infinitum excurrentes.

216. Sumantur nunc Factores æquales gemini $x^2$; eritque, ob $xx = \frac{xy(yy+xx)-1}{y^3(y-x)}$. Axe ergo fumto recta $AD$ ad priorem $XY$ normali, fiet $y = t$ & $x = u$, pro quo ifta æquatio refultat

$$0 = t^4u^2 - t^3u^3$$
$$- t^3u - t\,u^3$$
$$+ 1$$

quæ, facto $t$ infinito, abit in $t^4u^2 - t^3u + 1 = 0$, unde duæ nafcuntur æquationes $u = \frac{1}{t}$ & $u = \frac{1}{t^3}$. Quare hic Factor quatuor præbet ramos in infinitum excurrentes; primo nempe duos $dD$, $eE$ ex æquatione $u = \frac{1}{t}$; & duos ad eafdem partes fitos $\delta D$ & $\epsilon E$ ex æquatione $u = \frac{1}{t^3}$.

217. Tres Factores æquales $y^3$ referuntur ad ipfum Axem $XY$, fietque $t = x$ & $y = u$, unde nafcitur æquatio hæc,

$$0 = -t^3u^3 + ttu^4 - t^3u - tu^3 + 1:$$

quæ, pofito $t$ infinito, dat $t^3u^3 + t^3u = 0$, feu $u(uu+1) = 0$; unde, ob $uu + 1 = 0$ æquationem impoffibilem, unica obtinetur Afymtota recta $u = 0$, conveniens cum ipfo Axe $XY$, cujus indoles exprimetur hac æquatione $t^3u = 1$ feu $u = \frac{1}{t^3}$; ac propterea ifte Factor triplex duos tantum præbet ramos $yY$ & $xX$ in infinitum excurrentes. Omnino ergo

Curva

Curva quæſita octo ramos in infinitum extenſos habebit, qui quomodo in ſpatio finito inter ſe conjungantur hujus non eſt loci explicare. 

218. Ex hoc ergo & præcedente Capite ramorum in infinitum extenſorum varietas luculenter perſpicitur. Primum enim hi rami Curvarum vel ad Lineam quampiam rectam tanquam Aſymtotam convergunt, uti fit in Hyperbola, vel Aſymtotam rectam non habent, uti Parabola. Priori caſu rami Curvarum vocantur *hyperbolici*, poſteriori *parabolici*. Utriuſque claſſis inumerabiles dantur ſpecies; ramorum enim hyperbolicorum ſpecies his exprimuntur æquationibus, inter Coordinatas $t$ & $u$, quarum illa $t$ ſtatuitur infinita.

$$u = \frac{A}{t};\ u = \frac{A}{tt};\ u = \frac{A}{t^3};\ u = \frac{A}{t^4},\ \&c.$$
$$u^2 = \frac{A}{t};\ u^2 = \frac{A}{tt};\ u^2 = \frac{A}{t^3};\ u^2 = \frac{A}{t^4},\ \&c.$$
$$u^3 = \frac{A}{t};\ u^3 = \frac{A}{tt};\ u^3 = \frac{A}{t^3};\ u^3 = \frac{A}{t^4},\ \&c.$$

&c.

Ramorum vero parabolicorum ſpecies indicantur ſequentibus æquationibus.

$$u^2 = At;\ u^3 = At;\ u^4 = At;\ u^5 = At,\ \&c.$$
$$u^3 = At^2;\ u^4 = At^2;\ u^5 = At^2;\ u^6 = At^2,\ \&c.$$
$$u^4 = At^3;\ u^5 = At^3;\ u^6 = At^3;\ u^7 = At^3,\ \&c.$$

&c.

Quælibet autem æquatio harum expoſitarum, ad minimum, duos exhibet ramos in infinitum excurrentes, ſi exponentium ipſarum $t$ & $u$ non uterque fuerit numerus par; ſin autem uterque exponens fuerit numerus par, tum vel nullum ramum infinitum præbet, vel quatuor: illud ſcilicet evenit, ſi æquatio ſit impoſſibilis, hoc vero ſi ſit realis.

## CAPUT IX.

*De Linearum tertii ordinis subdivisione in species.*

219. NATURA atque numerus ramorum in infinitum extensorum merito essentiale discrimen in Lineis curvis constituere censetur, atque ex hoc fonte commodissime desumitur ratio subdivisionis Linearum cujusque ordinis in suas species diversas. Hinc enim quoque oritur eadem Linearum secundi ordinis divisio in suas species, quam ipsa rei natura supra suppeditaverat.

Sit enim proposita æquatio generalis pro Lineis secundi ordinis

$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0,$$

cujus supremum membrum $\alpha yy + \beta yx + \gamma xx$, potissimum spectetur, utrum habeat Factores simplices reales an secus. Quod si enim careat Factoribus, nascitur prima species *Ellipsis* dicta, sin autem Factores sint reales, videndum est utrum sint inæquales, an æquales illo casu oritur *Hyperbola*, hoc vero *Parabola*.

220. Casu ergo, quo membri supremi Factores sunt reales & inæquales, Curva duas habebit Asymtotas rectas; ad quarum naturam investigandam sit $\alpha yy + \beta yx + \gamma xx = (ay - bx)(cy - dx)$, ita ut sit

$$(ay - bx)(cy - dx) + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0.$$

Consideretur primum Factor $ay - bx$, qui in infinito dat $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, fiet itaque

$$ay - bx + \frac{\delta b + \epsilon a}{bc - ad} + \frac{\zeta}{cy - dx} = 0,$$

unde æquatio $ay - bx + \frac{\delta b + \epsilon a}{bc - ad} = 0$, definit positionem unius Asymtotæ rectæ; similique modo æquatio hæc $cy - dx + \frac{\delta d + \epsilon c}{ad - bc} = 0$, ostendet Asymtotam alteram. 

221. Ad naturam cujusque Asymtotæ scrutandam, æquationem ad alium Axem transferamus ponendo $y = \frac{au + bt}{\surd(aa + bb)}$ & $x = \frac{at - bu}{\surd(aa + bb)}$, sitque $\surd(aa + bb) = g$, erit $u((ac + bd)u + (bc - ad)t) + \frac{(\delta a - \epsilon b)u + (\delta b + \epsilon a)t}{g} + \zeta = 0$, ideoque

$$g(bc - ad)tu + g(ac + bd)uu + (\delta b + \epsilon a)t + (\delta a - \epsilon b)u + \zeta g = 0.$$

Hinc, posito in reliquis membris $u = -\frac{\delta b - \epsilon a}{g(bc - ad)}$, erit $(g(bc - ad)u + \delta b + \epsilon a)t + \frac{(ac + bd)(\delta b + \epsilon a)^2}{g(bc - ad)^2} - \frac{(\delta a - \epsilon b)(\delta b + \epsilon a)}{g(bc - ad)} + \zeta g = 0$, seu $g(bc - ad)u + \delta b + \epsilon a + \frac{g(\delta b + \epsilon c)(\delta b + \epsilon a)}{(bc - ad)^2 t} + \frac{\zeta g}{t} = 0$: erit ergo Asymtota hyperbolica generis $u = \frac{A}{t}$. Simili vero modo Asymtota altera ex Factore $cy - dx$ oriunda definietur, unde Curva habebit duo ramorum in infinitum extensorum paria, utrumque æquatione $u = \frac{A}{t}$ expressum.

222. Sint jam ambo Factores æquales, seu $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx = (ay - bx)^2$; atque, facta eadem ad alium Axem translatione, qua fit $y = \frac{ay + bt}{g}$, & $x = \frac{at - bu}{g}$, erit $gguu + \frac{(\delta a - \epsilon b)u}{g} + \frac{(\delta b + \epsilon a)t}{g} + \zeta = 0$; &, facto $t$ infinito, erit $uu + \frac{(\delta b + \epsilon a)t}{g^3} = 0$, quæ æquatio ostendit

 duos ramos parabolicos ſpeciei $uu = At$, quippe Curva ipſa erit Parabola, ipſaque ſua Aſymtota. Sin autem eſſet $\delta b + \varepsilon a = 0$, tum æquatio foret $gguu + \frac{\delta gu}{a} + \zeta = 0$, pro duabus rectis inter ſe parallelis, qui eſt caſus, quo æquatio ſecundi ordinis tota in duos Factores ſimplices eſt reſolubilis.

Sic igitur ſpecies Linearum ſecundi ordinis inveniſſemus, etiam ſi nondum erutæ fuiſſent.

223. Eodem igitur modo aggrediamur Lineas tertii ordinis, quarum æquatio generalis eſt

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

Supremum igitur membrum $\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3$, quia eſt imparium dimenſionum, vel unum habet Factorem ſimplicem realem, vel omnes tres Factores ſimplices erunt reales. Sequentes igitur caſus ſunt evolvendi.

I.

Si unicus extet Factor ſimplex realis.

II.

Si omnes tres ſint reales, & inter ſe inæquales.

III.

Si duo Factores fuerint æquales.

IV.

Si omnes tres Factores fuerint æquales.

Quoniam vero in quovis caſu ad unicum Factorem calculum accommodaſſe ſufficit; ſit iſte Factor, ſive ſolus adſit ſive cum aliis ſui æqualibus inæqualibuſve, $ay - bx$, atque ad hunc poſitio Axis ita immutetur, ut hactenus fecimus; quo facto, oriatur hæc æquatio, qua vice ſuperioris utamur cum æque late pateat

$$\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t + \theta u + \iota = 0,$$

ubi membrum ſupremum $\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3$, unum certe habet Factorem $u$.

### CASUS I.

224. Habeat ergo membrum ſupremum unicum Factorem realem $u$, quod evenit ſi $\beta\beta$ ſit minor quam $4\alpha\gamma$: atque, poſito $t$ infinito, erit $\alpha u + \delta = 0$, quæ eſt æquatio pro Aſymtota recta. Præbeat hæc æquatio valorem $u = c$; eritque,

$$\alpha tt(u-c) + t(\beta cc + \varepsilon c + \eta) + \gamma c^3 + \zeta cc + \theta c + \iota = 0,$$

quæ eſt æquatio pro natura Aſymtotæ. Hinc, prout $\beta cc + \varepsilon c + \eta$ vel non fuerit $= 0$, vel ſit $= 0$, duplex Aſymtotæ indoles prodit; nempe vel $u - c = \frac{A}{t}$, vel $u - c = \frac{A}{tt}$; unde duæ primæ Linearum tertii ordinis ſpecies formantur, quæ ita ſe habebunt.

1.

PRIMA Species unicam habet Aſymtotam rectam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

2.

SECUNDA Species unicam habet Aſymtotam rectam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

### CASUS II.

225. Sint membri ſupremi tres Factores ſimplices reales & inter ſe inæquales; quod evenit ſi in æquatione

$$\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t + \theta u + \iota = 0,$$

fuerit $\beta\beta$ major quam $4\alpha\gamma$. Hoc igitur caſu de unoquoque Factore eadem ſunt tenenda, quæ modo de unico Factore ſunt expoſita. Unuſquiſque ſcilicet ſuppeditat binos ramos hyperbolicos vel ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, vel ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, unde

 in hoc caſu quatuor diverſæ ſpecies Linearum tertii ordinis continentur, tribus Aſymtotis rectis ad ſe invicem utcunque inclinatis præditæ, quæ ſpecies ſunt.

3.

TERTIA Species tres habet Aſymtotas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

4.

QUARTA Species duas habet Aſymtotas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ & unam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

*Quinta Species unam habet Aſymtotam ſpeciei* $u = \frac{A}{t}$ *& duas ſpeciei* $u = \frac{A}{tt}$. *

Sexta Species tres habet Aſymtotas ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

226. Videamus autem an hæ omnes ſpecies ſint poſſibiles; quem in finem ſumamus hanc æquationem latiſſime patentem,

$$y(\alpha y - \beta x)(\gamma y - \delta x) + \epsilon xy + \zeta yy + \eta x + \theta y + \iota = 0,$$

cujus ſupremum membrum tres habet Factores reales; quanquam enim terminus $xx$ eſt omiſſus, tamen æquatio non minus late patet. Ex præcedentibus autem intelligitur, Factorem $y$ præbere Aſymtotam formæ $u = \frac{A}{t}$, ſi non fuerit $\eta = 0$. Quare videamus cujuſmodi Aſymtotam præbeat Factor $\alpha y - \beta x$. Ad hoc ponamus $y = \alpha u + \beta t$, & $x = \alpha t - \beta u$; ſitque, brevitatis ergo, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, quod ſemper aſſumere licet; atque æquatio transformabitur in hanc formam.

$$\begin{aligned}&\beta(\beta\gamma - \alpha\delta)ttu + (2\alpha\beta\gamma - (\alpha\alpha - \beta\beta)\delta)tuu + \alpha(\alpha\gamma + \beta\delta)u^3 \\ &+ \beta(\alpha\epsilon + \beta\zeta)tt + (2\alpha\beta\zeta + (\alpha\alpha - \beta\beta)\epsilon)tu + \alpha(\alpha\zeta - \beta\epsilon)u^2 \\ &\qquad + (\alpha\eta + \beta\theta)t \qquad + (\alpha\theta - \beta\eta)u \\ &\qquad + \iota = 0\end{aligned}$$

Hic Factor $\alpha y - \beta x$ tranſit in $u$; ex quo, poſito $t$ infinito,

* Vide infra pag. 119.

primum fit $u = \frac{\alpha\epsilon + \beta\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma} = c$, qui valor si loco $u$ in secundo membro continente $t$ substituatur, ostendet ex hoc Factore $u$ seu $\alpha y - \beta x$ Asymtotam oriri formæ $u = \frac{A}{t}$ nisi fuerit. 

$$\frac{\alpha\eta + \beta\theta}{\beta} + \frac{(\alpha\epsilon + \beta\zeta)(\gamma\epsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0.$$

Simili modo Factor $\gamma y - \delta x$ Asymtotam præbebit formæ $u = \frac{A}{t}$ nisi fuerit

$$\frac{\gamma\eta + \delta\theta}{\delta} + \frac{(\alpha\epsilon + \beta\zeta)(\gamma\epsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0.$$

227. Hinc patet fieri utique posse ut neque $\eta$ neque utraque formula modo inventa evanescat, ex quo species tertia utique erit possibilis. Quod ad speciem quartam attinet, ponatur $\eta = 0$, quo una Asymtota formæ $u = \frac{A}{tt}$ prodeat; tum autem ambæ reliquæ expressiones in unam coalescunt, ideoque binæ reliquæ Asymtotæ erunt formæ $u = \frac{A}{t}$, nisi fuerit $\theta + \frac{(\alpha\epsilon + \beta\zeta)(\gamma\epsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0$; unde & species quarta est possibilis. At, si præter $\eta = 0$, una ex binis reliquis expressionibus reddatur $= 0$, simul altera evanescit; quam ob rem fieri non potest, ut duæ Asymtotæ fiant formæ $u = \frac{A}{tt}$, quin simul tertia eandem formam induat; ex quo species quinta est impossibilis. Sexta autem ob hoc ipsum erit possibilis, quia oritur, si $\eta = 0$, & $\theta = \frac{-(\alpha\epsilon + \beta\zeta)(\gamma\epsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}$. Hi ergo duo casus quinque tantum præbuerunt species Linearum tertii ordinis, quod ea, quam quintam posuimus, prætermitti debet, &

5.

QUINTA Species tres habet Asymtotas speciei $u = \frac{A}{tt}$.

## Casus III.

228. Habeat membrum ſupremum duos Factores $u$ æquales; quod evenit, ſi in æquatione caſus præcedentis primus terminus $\alpha ttu$ evaneſcat. Æquatio ergo generalis ad hunc caſum pertinens erit hujuſmodi,

$$\alpha tuu - \beta u^3 + \gamma tt + \delta tu + \varepsilon uu + \zeta t + \eta u + \theta = 0,$$

habet ergo membrum ſupremum duos Factores $u$ æquales, ac tertium $\alpha u - \beta u$ reliquis inæqualem. Iſte tertius Factor producet Aſymtotam vel formæ $u = \frac{A}{t}$, vel formæ $u = \frac{A}{tt}$, prout fuerit hæc expreſſio

$$(\alpha\delta + 2\beta\gamma)(\alpha^2\varepsilon + \alpha\beta\delta + \beta\beta\gamma) - \alpha^3(\alpha\eta + \beta\zeta)$$

vel non $= 0$, vel $= 0$.

229. Quod ad duos Factores æquales attinet, primum caſus occurrit, ſi $\gamma$ non fuerit $= 0$; tum enim, facto $t = \infty$, fiet $\alpha uu + \gamma t = 0$, quæ eſt æquatio pro Aſymtota parabolica ſpeciei $uu = At$. Hinc iſtæ duæ naſcentur ſpecies novæ Linearum tertii ordinis, nempe,

6.

Sexta Species habet unam Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$ & unam Aſymtotam ſpeciei $uu = At$.

7.

Septima Species habet unam Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$ & unam parabolicam ſpeciei $uu = At$.

230. Sit jam $\gamma = 0$; atque Factor tertius $\alpha t - \beta u$ dabit Aſymtotam formæ $u = \frac{A}{tt}$, ſi fuerit

$$\delta(\alpha\varepsilon + \beta\delta) = \alpha(\alpha\eta + \beta\zeta)$$

ſin autem hæc æqualitas non habeat locum, Aſymtota erit formæ $u = \frac{A}{t}$. Habebimus ergo hanc æquationem

+ $\alpha tuu$

$$\left.\begin{array}{ll} +\alpha tuu & -\epsilon u^3 \\ +\delta tu & +\epsilon uu \\ +\zeta t & +\eta u \\ +\theta & \end{array}\right\} = 0$$

Hic, facto $t = \infty$, fiet $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$.

Sit primum $\delta\delta$ minor quam $4\alpha\zeta$, atque hinc nulla orietur Afymtota; quare ex hoc cafu duæ oriuntur fpecies.

8.

OCTAVA Species habet unicam Afymtotam fpeciei

$$u = \frac{A}{t}.$$

9.

NONA Species habet unicam Afymtotam fpeciei

$$u = \frac{A}{tt}.$$

231. Sint æquationis $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$, ambæ radices reales & inæquales, nempe $\delta\delta$ major quam $4\alpha\zeta$; atque hinc duæ prodibunt Afymtotæ rectæ inter fe parallelæ, utraque formæ $u = \frac{A}{t}$. qui cafus denuo duas fuppeditat Species.

10.

DECIMA Species habet unam Afymtotam fpeciei $u = \frac{A}{tt}$ & duas inter fe parallelas fpeciei $u = \frac{A}{t}$.

11.

UNDECIMA Species habet unam Afymtotam fpeciei $u = \frac{A}{tt}$ & duas inter fe parallelas fpeciei $u = \frac{A}{t}$.

232. Sint æquationis $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$, ambæ radices inter fe æquales, feu $\delta\delta = 4\alpha\zeta$, feu $\alpha uu + \delta u + \zeta = \alpha(u-c)^2$, fietque $\alpha t(u-c)^2 = \epsilon c^3 - \epsilon cc - \eta c - \theta$, unde oritur Afymtota recta una fpeciei $uu = \frac{A}{t}$. Hinc ergo duæ nafcuntur Species novæ.

12.

DUODECIMA Species habet unam Afymtotam fpeciei

 $u = \frac{A}{t}$ & unam ſpeciei $uu = \frac{A}{t}$.

13.

Decimatertia Species habet unam Aſymtotam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$ & unam ſpeciei $uu = \frac{A}{t}$.

### Casus IV.

233. Quod ſi membri ſupremi omnes tres Factores fuerint æquales, æquatio habebit hujuſmodi formam,

$$\alpha u^3 + \beta tt + \gamma tu + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0,$$

Hic primum ſpectandus eſt terminus $\beta tt$, qui ſi non deſit, Curva habebit Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$, ſicque una oritur Species.

14.

Decimaquarta Species habet unicam Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = Att$.

234. Deſit jam terminus $\beta tt$, eritque

$$\alpha u^3 + \gamma tu + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = 0;$$

unde, poſito $t$ infinito, fiet $\alpha u^3 + \gamma tu + \epsilon t = 0$, niſi ſint $\gamma$ & $\epsilon = 0$. Non igitur ſit $\gamma = 0$, atque in hac æquatione duæ continentur æquationes $\alpha uu + \gamma t = 0$, & $\gamma u + \epsilon = 0$; prior eſt pro Aſymtota parabolica ſpeciei $uu = At$; poſterior vero, ſi ponatur $\frac{-\epsilon}{\gamma} = c$, dabit æquationem hanc

$$\gamma t(u - c) + \alpha c^3 + \delta cc + \zeta c + \eta = 0,$$

eritque ergo pro Aſymtota hyperbolica ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, unde.

15.

Decimaquinta Species unam habet Aſymtotam parabolicam ſpeciei $uu = At$, unam rectam ſpeciei $u =$

$\frac{A}{t}$, atque Axis parabolæ parallelus eſt alteri Aſymtotæ rectæ. Cap IX.

235. Sit etiam $\gamma = o$, ut ſit hæc æquatio

$$\alpha u^3 + \delta uu + \epsilon t + \zeta u + \eta = o,$$

ubi $\epsilon$ evaneſcere non poteſt, niſi ſimul Linea ceſſet eſſe Curva. Facto autem $t$ infinito, neceſſario $u$ debet eſſe infinita, unde fit $\alpha u^3 + \epsilon t = o$, quæ præbet ſpeciem ultimam.

16.

Decimasexta Species unam habet Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3 = At$.

236. Omnes ergo Lineas tertii ordinis reduximus ad *ſedecim Species*, in quibus propterea omnes illæ *Species ſeptuaginta duæ*, in quas Newtonus Lineas tertii ordinis diviſit, continentur. Quod vero inter hanc noſtram diviſionem ac *Newtonianam* tantum intercedat diſcrimen mirum non eſt; hic enim tantum ex ramorum in infinitum excurrentium indole Specierum diverſitatem deſumſimus, cum Newtonus quoque ad ſtatum Curvarum in ſpatio finito ſpectaſſet, atque ex hujus varietate diverſas Species conſtituiſſet. Quanquam autem hæc diviſionis ratio arbitraria videtur, tamen Newtonus ſuam tandem rationem ſequens multo plures Species producere potuiſſet, cum equidem mea methodo utens neque plures neque pauciores Species eruere queam.

237. Quo igitur natura & complexus cujuſque Speciei melius perſpiciatur, æquationem generalem pro qualibet Specie exhibebo, idque in ſimpliciſſima forma, quæ ſalva univerſitate locum habere poteſt. Pro unaquaque vero ſimul Species *Newtonianas* eo pertinentes recenſebo.

Species Prima.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + bx + cy + d = o,$$

exiſtente $mm$ majore quam $nn$ & niſi fuerit $b = o$.

Huc pertinent Newtoni ſpecies, 33, 34, 35, 36, 37, 38;

### Species Secunda.

$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + cy + d = 0$:
existente $mm$ minore quam $nn$.
Huc pertinent Newtoni species, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

### Species Tertia.

$y(x - my)(x - ny) + ayy + bx + cy + d = 0$,
ubi nec $b = 0$, nec $mb + c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, nec $nb + c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, neque $m = n$.
Huc pertinent Newtoni Species, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; item 24, 25, 26, 27, si $a = 0$.

### Species Quarta.

$y(x - my)(x - ny) + ayy + cy + d = 0$;
ubi nec $c + \frac{aa}{(m-n)^2} = 0$, nec $m = n$.
Huc pertinent Newtoni Species 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21; item, si $a = 0$, hæ 28, 29, 30, 31.

### Species Quinta.

$y(x - my)(x - ny) + ayy - \frac{aay}{(m-n)^2} + d = 0$,
non existente $m = n$.
Huc pertinent Newtoni Species, 22, 23, & 32.

### Species Sexta.

$yy(x - my) + axx + bx + cy + d = 0$;
si neque $a = 0$, neque $2m^3 aa - mb - c = 0$.
Huc pertinent Nowtoni Species, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52.

### SPECIES SEPTIMA.

$$yy(x - my) + axx + bx + m(2m^2a^2 - b)y + d = 0;$$
non existente $a = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 53, 54, 55, 56.

### SPECIES OCTAVA.

$$yy(x - my) + bbx + cy + d = 0;$$
non existente $c = -mbb$ nec $b = 0$;

Huc pertinent NEWTONI Species, 61 & 62.

### SPECIES NONA.

$$yy(x - my + bbx - mbby + d = 0;$$
non existente $b = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 63.

### SPECIES DECIMA.

$$yy(x - my) - bbx + cy + d = 0;$$
non existente $c = mbb$, nec $b = 0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 57, 58, 59.

### SPECIES UNDECIMA.

$$yy(x - my) - bbx + mbby + d = 0;$$
non existente $b = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 60.

### SPECIES DUODECIMA.

$$yy(x - my) + cy + d = 0;$$
non existente $c = 0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 64.

LIB. II.

SPECIES TERTIA-DECIMA.

$$yy(x-my)+d=0.$$

Huc pertinet NEWTONI Species, 65.

SPECIES QUARTA-DECIMA.

$$y^3+axx+bxy+cy+d=0;$$
non existente $a=0$.

Huc pertinent NEWTONI Species, 67, 68, 69, 70, 71.

SPECIES QUINTA-DECIMA.

$$y^3+bxy+cx+d=0;$$
non existente $b=0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 66.

SPECIES SEXTA-DECIMA.

$$y^3+ay+bx=0;$$
non existente $b=0$.

Huc pertinet NEWTONI Species, 72.

238. Species autem hæ plerumque tam late patent, ut sub unaquaque varietas satis notabiles contineantur; si quidem ad formam, quam Curvæ habent in spatio finito, respiciamus. Hancque ob causam NEWTONUS numerum Specierum multiplicavit, ut eas Curvas, quæ in spatio finito notabiliter discrepant, a se invicem secerneret. Expediet ergo has, quas *Species* nominavimus, *Genera* appellare, atque varietates, quæ sub unoquoque deprehenduntur, ad *Species* referre. Imprimis autem hoc erit tenendum, si quis Lineas quarti altiorisve ordinis simili modo subdividere voluerit; ibi enim multo major varietas in quavis Specie sic inventa locum habebit.

# CAPUT X.

*De præcipuis Linearum tertii ordinis proprietatibus.*

239. QUEMADMODUM ſupra Linearum ſecundi ordinis proprietates præcipuas ex æquatione generali deduximus, ita etiam Linearum tertii ordinis præcipuæ proprietates ex æquatione generali cognoſci poterunt: ſimilique modo licebit Linearum quarti altiorisve gradus proprietates ex æquatione concludere. Quam ob rem conſideremus æquationem generaliſſimam pro Lineis tertii ordinis, quæ eſt

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

quæ exprimet naturam Lineæ tertii ordinis cujuſvis inter Coordinatas $x$ & $y$ ad quemvis angulum inclinatas, & recta quacunque pro Axe aſſumta.

240. Niſi igitur $\alpha$ ſit $= 0$, unicuique Abſciſſæ $x$ vel una reſpondebit Applicata realis, vel tres. Ponamus dari tres Applicatas reales; atque manifeſtum eſt earum relationem per æquationem difiniri poſſe. Poſita itaque $\alpha = 1$, iſtiuſmodi erit æquatio,

$$y^3 + (\beta x + \varepsilon)yy + (\gamma xx + \zeta x + \theta)y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0:$$

atque ſumma iſtarum trium Applicatarum eidem Abſciſſæ $x$ reſpondentium, erit $= -\beta x - \varepsilon$; ſumma trium rectangulorum ex binis applicatis formatorum erit $= \gamma xx + \zeta x + \theta$; ac denique productum omnium ſeu parallelipedum ex illis formatum erit $= -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \kappa = 0$. Si duæ Applicatæ eſſent imaginariæ, hæc quidem eadem valerent, at ad Linearum figuram accommodari non poſſent, quia ex ea

LIB. II. neque ſumma neque rectangulum duarum Applicatarum imaginarium intelligi poteſt.

TAB. XII. Fig. 44. 241. Sit igitur Linea quæcunque tertii ordinis ad Axem $AZ$ relata ad quem ſub dato angulo applicatæ ſint Ordinatæ $LMN$, $lmn$ Curvam ſecantes in tribus punctis. Poſita ergo Abſciſſa $AP = x$, Applicata $y$ triplicem habebit valorem $PL$, $PM$, & $-PN$: unde erit $PL + PM - PN = -\beta x - \varepsilon$. Quare, ſi capiatur $PO = z = \frac{PL + PM - PN}{3}$, punctum $O$ ita erit in medio ſitum, ut ſit $LO = MO + NO$. Cum igitur ſit $z = -\frac{\beta x - \varepsilon}{3}$, hoc punctum $O$ ſitum erit in Linea recta $OZ$, quæ recta propterea omnes Ordinatas $lmn$ ipſi $LMN$ parallelas ita ſecabit in $o$, ut ſit $lo + mo = no$; quæ proprietas analoga eſt proprietati Diametrorum, qua Lineæ ſecundi ordinis ſunt præditæ. Quod ſi ergo duæ Ordinatæ parallelæ & Curvam in tribus punctis ſecantes ita ſecentur in punctis $O$ & $o$, ut binæ Applicatæ ad unam partem jacentes ſimul ſumtæ æquales ſint tertiæ ad partem alteram ſitæ, recta per hæc puncta $O$ & $o$ ducta omnes reliquas Ordinatas illis parallelas ſimiliter ſecabit, eritque quaſi Diameter Lineæ tertii ordinis.

242. Quoniam in Lineis ſecundi ordinis omnes Diametri ſe mutuo in eodem puncto interſecant, videamus quomodo plures hujuſmodi Diametri Linearum tertii ordinis inter ſe ſint comparatæ. Concipiamus ergo ad eundem Axem $AP$ ſub alio quovis angulo Applicatas; ſitque Abſciſſa $= t$ & Applicata $= u$; erit $y = nu$ & $x = t - mu$, qui valores in æquatione generali

$$y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

ſubſtituti hanc dabunt æquationem

$+ n^3 u^3$

$$\left.\begin{matrix} + n^3u^3 + \beta n^2u^2t + \gamma nutt + \delta t^3 + \varepsilon n^2u^2 + \zeta nut + \eta tt + \theta nu + \iota t + \kappa \\ - \beta mn^2u^3 - 2\gamma mnu^2t - 3\delta mutt \quad - \zeta mnuu - 2\eta mut - \iota mu \\ + \gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t \qquad + \eta m^2uu \\ - \delta m^3u^3 \end{matrix}\right\} = 0$$

CAP. X.

Hinc pro Linea illa recta Diametri vicem sustinente, si ejus Applicata sub eodem angulo ad Abscissam $t$ ducta vocetur $= v$, erit $3v = \frac{-\beta n^2t + 2\gamma mnt - 3\delta m^2t - \varepsilon nn + \zeta mn - \eta mm}{n^3 - \beta mn^2 + \gamma m^2n - \delta m^3}$.

243. Sit jam $O$ intersectio harum duarum Diametrorum, unde ad Axem $AZ$ primo prioribus Applicatis parallela ducatur $OP$, tum vero posterioribus parallela $OQ$, eritque $AP = x$, $PO = z$, $AQ = t$ & $OQ = v$. Tum vero erit $z = nv$ & $x = t - mv$, ideoque $v = \frac{z}{n}$, & $t = x + \frac{m}{n}z$. Primo itaque habetur $3z = -\beta x - \varepsilon$, porroque $3v = \frac{-\beta x}{n} - \frac{\varepsilon}{n}$ & $t = x - \frac{\beta mx}{3n} - \frac{\varepsilon m}{3n}$. Substituantur hi valores in æquatione ante inventa, & prodibit TAB. XII. Fig. 45.

$$\left.\begin{matrix} - \beta nnx + \beta\beta mnx - \beta\gamma mmx + \frac{\beta\delta m^2x}{n} \\ - \varepsilon nn \quad + \beta\varepsilon mn \quad - \gamma\varepsilon mm + \frac{\delta\varepsilon m^2}{n} \\ + \beta nnx - \frac{\beta\beta mnx}{3} - \frac{\beta\varepsilon mn}{3} + \varepsilon nn \\ - 2\gamma mnx + \frac{2\beta\gamma mmx}{3} + \frac{2\gamma\varepsilon mm}{3} - \zeta mm \\ + 3\delta mmx - \frac{\beta\delta m^2x}{n} - \frac{\delta\varepsilon m^2}{n} + \eta mm \end{matrix}\right\} = 0.$$

seu

$$\left.\begin{matrix} \frac{2}{3}\beta\beta mnx - \frac{1}{3}\beta\gamma mmx - 2\gamma mnx + 3\delta mmx \\ + \frac{2}{3}\beta\varepsilon mn - \frac{1}{3}\gamma\varepsilon mm - \zeta mn \quad + \eta mm \end{matrix}\right\} = 0$$

LIB. II. 244. Pendet ergo utique interſectio Diametrorum $O$ ab inclinatione Applicatarum ad Axem, quæ litteris $m$ & $n$ continetur; neque idcirco, (ſi interſectionem Diametrorum *Centrum* vocare lubeat,) Lineæ tertii ordinis omnes Centro gaudent. Interim tamen caſus exhiberi poſſunt, quibus Diametrorum interſectio mutua in idem punctum fixum incidat. Fiet ſcilicet hoc, ſi termini per $mn$ & $mm$ affecti ſeorſim nihilo æquales ponantur, ac valores ipſius $x$ inde orituri æquales ſtatuantur. Fiet autem ex his duabus æqualitatibus $x = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma} = \frac{3\eta - \gamma\varepsilon}{\beta\gamma - 9\delta}$; qui duo valores ut congruant, neceſſe eſt ut ſit

$$6\beta\beta\eta - 2\beta\beta\gamma\varepsilon - 18\gamma\eta + 6\gamma\gamma\varepsilon = 3\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\gamma\varepsilon - 27\delta\zeta + 18\beta\delta\varepsilon,$$

ſeu

$$\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\eta - 9\delta\zeta + 6\gamma\eta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon = 0,$$

unde fit $\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}$. Quoties ergo $\eta$ hujuſmodi habuerit valorem, toties omnes Diametri ſe mutuo in uno eodemque puncto interſecant; ideoque hæ Lineæ tertii ordinis Centro gaudebunt, quod reperietur ſumendo in Axe.

$$AP = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}, \ \&$$

$$PO = \frac{-3\beta\zeta + 6\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}.$$

245. Hæc eadem Centri determinatio, ſi quod datur, locum habet ſi pro primo coëfficiente $\alpha$ non ponatur unitas. Si enim propoſita fuerit æquatio generaliſſima pro Lineis tertii ordinis

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta xy + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

hæ Curvæ Centro erunt præditæ, ſi fuerit

$\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\alpha\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$. Tum vero Centrum

erit in $O$, existente $AP = \frac{3\varkappa\zeta - 2\varepsilon\theta}{2\varepsilon\varepsilon - 6\alpha\gamma}$ & $PO = \frac{6\gamma\theta - 3\varepsilon\zeta}{2\varepsilon\varepsilon - 6\alpha\gamma}$. Cap. V. Quare, si unica Ordinata Curva in tribus punctis secans ita dividatur, ut binæ Applicatæ ad unam partem sitæ æquentur tertiæ ad alteram partem jacenti, tum recta per Centrum & hoc divisionis punctum ducta, omnes alias Ordinatas illi parallelas similiter secabit.

246. Si hæc ad æquationes Specierum supra enumeratarum accommodentur, patebit Species primam, secundam, tertiam, quartam & quintam Centro gaudere, si modo sit $a = 0$; hocque casu Centrum in ipso Abscissarum initio esse positum. Species sexta & septima Centro prorsus carent, quia coëfficiens $a$ abesse nequit. Species vero octava, nona, decima, undecima, duodecima & decima-tertia Centrum habent, semper in Abscissarum initio positum. In Speciebus decima-quarta, decima-quinta & decima-sexta Centrum infinite distat, ideoque omnes illæ Lineæ Triametri inter se erunt parallelæ.

247. His de summa trium cujusque Applicatæ valorum notatis, contemplemur eorundem productum, quoniam de rectangulorum agregato nihil admodum notatu dignum reperitur. Erit ergo ex æquatione generali §. 239. $- PM.PL.PN = -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \varkappa$: ad quam expressionem explicandam ad hoc attendamus, quod si ponatur $y = 0$, fiat $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \varkappa = 0$, cujus propterea æquationis radices dabunt Axis $AZ$ & Curvæ intersectiones. Quæ si sint in punctis $B$, $C$, & $D$ erit $\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \varkappa = \delta(x - AB)(x - AC)(x - AD)$; quapropter erit $PL.PM.PN = \delta.PB.PC.PD$; ideoque, sumta alia quacunque Ordinata $lmn$ priori parallela, erit $PL.PM.PN : PB.PC.PD = pl.pm.pn : pB\,pC.pD$; quæ proprietas omnino similis est illi, quam supra pro Lineis secundi ordinis ratione rectangulorum invenimus; atque similis proprietas in Lineas quarti, quinti, & superiorum ordinum competet.

248. Habeat nunc Linea tertii ordinis tres quoque Asymtotas rectas $FBf$, $GDg$, $HCh$. Quoniam ipsa Linea tertii Tab. XII. Fig. 46.

fed, fi duo ad eandem partem vergant, tertium neceffario ad oppofitas tendet. Hanc ob rem hujufmodi Linea tertii ordinis qualem figura repræfentat, eft impoffibilis, quoniam recta fecans Afymtotas in punctis $f$, $g$, $h$, Curvam vero in $l$, $m$, $n$, præbet partes $fn$, $gm$, $hl$ in eandem plagam vergentes, quarum fumma nihilo æqualis effe nequit. Partes enim in eandem plagam vergentes obtinent idem fignum, puta $+$; quæ vero in contrariam plagam tendunt fignum $-$: unde patet fummam trium harum partium evanefcere non poffe nifi fignis diverfis fint prædítæ. TAB. VIII. Fig. 47.

251. Hinc jam clare perfpicitur ratio cur in Linea tertii ordinis dari nequeant duæ Afymtotæ rectæ fpeciei $u = \frac{A}{tt}$, dum tertia Afymtota fit fpeciei $u = \frac{A}{t}$, propterea quod illa crura hyperbolica infinities magis ad fuam Afymtotam convergant, quam crus hyperbolicum fpeciei $u = \frac{A}{t}$. Ponamus enim rectam $fl$ in infinitum removeri, fientque intervalla $fn$, $gm$, $hl$ infinite parva. At, fi rami duo $nx$, $my$ ponantur fpeciei $u = \frac{A}{tt}$, tertius vero ramus $lz$ fpeciei $u = \frac{A}{t}$, tum intervalla $fn$ & $gm$ infinities erunt minora quam intervallum $hl$, ideoque effe nequit $gm = fn + hl$. TAB. XII. Fig. 46.

252. In Lineis ergo fuperiorum ordinum, quæ tot habent Afymtotas quot dimenfiones, unica Afymtota fpeciei $u = \frac{A}{t}$ adeffe nequit, dum reliquæ fint fpecierum fuperiorum $u = \frac{A}{tt}$, $u = \frac{A}{t^3}$ &c.; fed, fi una adfit fpeciei $u = \frac{A}{t}$, neceffario & altera adeffe debet. Ob eandem rationem, fi Afymtota fpeciei $u = \frac{A}{t}$ nulla adfit, fieri non poteft ut una tantum fpeciei $u = \frac{A}{tt}$ adfit, fed ad minimum duæ ad-

 esse debebunt. Crura enim hyperbolica speciei $u = \frac{A}{t^3}$, $u = \frac{A}{t^4}$ &c., infinities magis ad suas Asymtotas convergunt, quam species $u = \frac{A}{tt}$. Hinc igitur in enumeratione Specierum, quæ in ordine quopiam superiori continentur, casus impossibiles facile excludi, hocque insignes calculi molestiæ evitari poterunt.

253. Ponamus autem Lineam tertii ordinis a recta quapiam in duobus tantum punctis secari; atque ab omnibus aliis rectis huic parallelis vel in duobus etiam punctis vel nusquam secabitur. Si igitur in Axe quocunque statuantur Applicatæ $y$ huic rectæ parallelæ, æquatio ita erit comparata

$$yy + \frac{(\gamma xx + \zeta x + \theta)y}{\beta x + \epsilon} + \frac{\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa}{\beta x + \epsilon} = 0.$$

Scilicet, si Abscissa $AP$ dicatur $= x$, duæ habebuntur Applicatæ $y$, nempe $PM$ & $-PN$; erit autem, ex natura æquationum, $PM - PN = \frac{-\gamma xx - \zeta x - \theta}{\beta x + \epsilon}$. Bisecetur Ordinata $MN$ in puncto $O$, erit $PO = \frac{\gamma xx + \zeta x + \theta}{\beta x + \epsilon}$; hinc si ponatur $PO = z$, erit $z(\beta x + \epsilon) = \gamma xx + \zeta x + \theta$: unde patet omnia puncta $O$ Ordinatas parallelas $MN$ bisecantia sita esse in Hyperbola, nisi fuerit $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile per $\beta x + \epsilon$, quo casu punctum $O$ positum erit in Linea recta.

254. Quod si ergo $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile fuerit per $\beta x + \epsilon$, tum Curva prædita erit Diametro, seu recta omnes Ordinatas parallelas $MN$ bisecante; quæ proprietas in omnes Lineas secundi ordinis competit. Verum, si $\gamma xx + \zeta x + \theta$ divisibile sit per $\beta x + \epsilon$, evanescere debebit si ponatur $x = \frac{-\epsilon}{\beta}$; quare, si fuerit $\gamma\epsilon\epsilon - \beta\epsilon\zeta + \beta\beta\theta = 0$, tum Linea tertii ordinis Diametro erit prædita.

255. Hinc igitur generalissime omnes casus determinare poterimus, quibus Lineæ tertii ordinis Diametris sunt præditæ. Sit enim proposita æquatio generalis CAP. X.

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \varkappa = 0,$$

cujus Applicatæ $y$, quia triplicem valorem vel unicum habent, Diametri proprietatem recipere nequeunt. Ducantur ergo sub alio quocunque angulo ad eundem Axem aliæ Applicatæ $u$, ita ut sit $y = nu$, & $x = t - mu$, ac fiat substitutio

$$\left.\begin{array}{l} + \alpha n^3u^3 + \beta n^2u^2t + \gamma nutt + \delta t^3 + \epsilon n^2u^2 + \zeta nut + \eta tt + \theta nu + \iota t + \varkappa \\ - \beta mn^2u^3 - 2\gamma mnu^2t - 3\delta mutt - \zeta mnu^2 - 2\eta mut - \iota mu \\ + \gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t \qquad\qquad + \eta m^2u^2 \\ - \delta m^3u^3 \end{array}\right\} = 0$$

Primum ergo, quo hæ novæ Applicatæ ad Diametrum recipiendam aptæ reddantur, necesse est ut duplicem tantum valorem induere possint, eritque idcirco

$$\alpha n^3 - \beta mn^2 + \gamma m^2n - \delta m^3 = 0.$$

256. Præterea vero requiritur ut quantitas, per quam $u$ est multiplicata, nempe $(\gamma n - 3\delta m)tt + (\zeta n - 2\eta m)t + \theta n - \iota m$, divisibilis sit per eam, quæ $uu$ multiplicat, quæ est $(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)t + \epsilon nn - \zeta mn + \eta mm$; sive illa nihilo fieri debet æqualis, si ponatur $t = \frac{-\epsilon nn + \zeta mn - \eta mm}{\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm}$.

Hinc ergo fiet

$$\iota = \frac{\theta n}{m} - \frac{(\zeta n - 2\eta m)(\epsilon nn - \zeta mn + \eta mm)}{(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)m} + \frac{(\gamma n - 3\delta m)(\epsilon nn - \zeta mn + \eta mm)^2}{(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)^2 m}.$$

257. Si hæc ad Species supra enumeratas applicemus, apparebit in Specie prima nullam prorsus Diametrum locum habere

 posse. In Specie autem secunda Ordinatæ Axi, in quo Abscissæ $x$ capiuntur parallelæ Diametro, bisecabuntur. Species tertia nullam prorsus Diametrum admittit. Species quarta semper unam habet Diametrum Ordinatas uni Asymtotæ parallelas bisecantem. Quinta vero Species tres habebit Diametros, quæ ordinatas singulis Asymtotis parallelas bisecabunt. Species sexta nullam prorsus habere potest Diametrum. Septima unam Diametrum semper habet pro Ordinatis Asymtotæ ex Factore $x - m y$ ortæ parallelis. Octava unam Diametrum habet pro Ordinatis Axi parallelis. Nona Species duas habet Diametros; alteram pro Ordinatis Axi parallelis, alteram pro Ordinatis alteri Asymtotæ parallelis. Decima uti octava, & undecima uti nona est comparata. Duodecima ratione Diametrorum par est octavæ, & decima-tertia nonæ. Decima-quarta unam habet Diametrum pro ordinatis Axi parallelis. Species decima-quinta & sexta omnino Ordinatas, quæ in duobus punctis Curvam secent, non admittunt; ideoque Diametro gaudere nequeunt. Hæc autem Diametrorum proprietates a NEWTONO probe sunt notatæ, quam ob caussam earum commemorationem hic data opera attulisse juvabit.

258. Quanquam in æquationibus, quas supra pro singulis Speciebus Linearum tertii ordinis dedimus, Coordinatas $x$ & $y$ inter se normales posuimus, tamen Speciei natura non mutatur, etiamsi eæ quomodocunque ad se invicem sint inclinatæ. Quot enim æquatio, positis Coordinatis orthogonalibus, præbet crura in infinitum extensa, totidem quoque præbebit eadem æquatio, si Applicatæ ad Axem utcunque inclinentur. Neque vero etiam natura crurum in infinitum excurrentium mutatur, mutata Coordinatarum inclinatione; quæ enim crura sunt parabolica, eadem manebunt parabolica, & quæ sunt hyperbolica eandem naturam retinebunt. Quin etiam Species crurum tam parabolicorum quam hyperbolicorum non alterabitur. Quare omnis Curva, quam æquatio pro prima Specie exhibita præbet, sive Coordinatæ statuantur rectangulæ sive obliquangulæ, semper ad eandem Speciem primam erit referenda,

referenda, similique modo reliquarum Specierum omnium ratio est comparata. CAP. X.

259. Admissa ergo Coordinatarum obliquitate quacunque, æquationes supra datæ non restringentur, si loco $y$ ponatur $\nu u$, & $t - \mu u$ loco $x$, existente $\mu\mu + \nu\nu = 1$. Sumto autem angulo obliquitatis pro lubitu, æquationes supra datæ simpliciores reddi poterunt. Hinc pro singulis Speciebus sequentes simplicissimæ æquationes inter Coordinatas obliquangulas $t$ & $u$ formabuntur.

SPECIES PRIMA.

$$u(tt + nnuu) + auu + bt + cu + d = 0,$$
existente nec $n = 0$ nec $b = 0$.

SPECIES SECUNDA.

$$u(tt + nnuu + auu + cu + d = 0,$$
non existente $n = 0$.

SPECIES TERTIA.

$$u(tt - nnuu) + auu + bt + cu + d = 0,$$
existente nec $n = 0$, nec $b = 0$, nec $\pm nb + c + \frac{aa}{4nn} = 0$.

SPECIES QUARTA.

$$u(tt - nnuu) + auu + cu + d = 0,$$
existente nec $n = 0$, nec $c + \frac{aa}{4nn} = 0$.

SPECIES QUINTA.

$$u(tt - nnuu) + auu - \frac{aau}{4nn} + d = 0,$$
non existente $n = 0$.

Lib. II.

Species Sexta.

$tuu + att + bt + cu + d = 0$,
existente nec $a = 0$, nec $c = 0$.

Species Septima.

$tuu + att + bt + d = 0$,
non existente $a = 0$.

Species Octava.

$tuu + bbt + cu + d = 0$,
existente nec $b = 0$, nec $c = 0$.

Species Nona.

$tuu + bbt + d = 0$,
non existente $b = 0$.

Species Decima.

$tuu - bbt + cu + d = 0$,
existente nec $b = 0$, nec $c = 0$.

Species Undecima.

$tuu - bbt + d = 0$,
non existente $b = 0$.

Species Duodecima.

$tuu + cu + d = 0$,
non existente $c = 0$.

Species Decima-tertia.

$tuu + d = 0$.

SPECIES DECIMA-QUARTA.

$$u^3 + att + cu + d = 0.$$

SPECIES DECIMA-QUINTA.

$$u^3 + atu + bt + d = 0,$$

non exiſtente $a = 0$.

SPECIES DECIMA-SEXTA.

$$u^3 + at = 0.$$

---

## CAPUT XI.

### *De Lineis quarti Ordinis.*

260. ÆQUATIO generalis pro Lineis quarti Ordinis eſt

$$\alpha y^4 + \beta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta y x^3 + \epsilon x^4 + \zeta y^3 + \eta y^2 x + \theta y x x + \iota x^3 + \kappa y y + \lambda y x + \mu x x + \nu y + \xi x + o = 0;$$

quæ autem, (variatis tum Coordinatarum inclinatione, tum Axis poſitione, tum Abſciſſarum initio,) multis modis pro diverſis caſibus ad ſimpliciorem formam reduci poteſt. Quo igitur, ſecundum methodum traditam, omnes *Species* vel potius *Genera* Linearum, quæ in hoc ordine continentur enumerentur, ad membrum ſupremum reſpici oportet, unde ſequentes caſus naſcuntur diverſi.

I.

Si ſupremi membri omnes quatuor Factores ſimplices ſunt imaginarii.

II.

Si duo Factores tantum ſunt reales & inæquales inter ſe.

III.

Si duo Factores tantum sunt reales & æquales.

IV.

Si omnes quatuor Factores sunt reales & inæquales.

V.

Si duo Factores inter se sunt æquales, reliquis binis inter se existentibus inæqualibus.

VI.

Si præter duos Factores æquales etiam reliqui duo sint inter se æquales.

VII.

Si tres Factores simplices fuerint inter se æquales.

VIII.

Si omnes quatuor Factores inter se æquales fuerint.

## CASUS. I.

261. Si omnes Factores membri supremi fuerint imaginarii, Curva ramis in infinitum excurrentibus omnino erit destituta; quoniam igitur ex diversitate ramorum infinitorum discrimen Generum petimus, iste casus unicum præbebit Genus. Erit ergo.

### GENUS I.

Curvarum ramis in infinitum extensis omnino carentium, quarum natura hac æquatione simplicissima exprimetur

$$(yy + mmxx)(yy - 2pxy + qqxx) + ay^3x + byx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Existente $pp$ minore quam $qq$. Quoniam enim in supremo membro termini $y^4$ & $x^4$ necessario adsunt, Coordinatis $x$ & $y$ quantitate data sive augendis sive minuendis, effici potest, ut termini $y^3$ & $x^3$ ex secundo membro excedant.

## CASUS II.

262. Si duo Factores membri ſupremi tantum ſint reales & inæquales, per obliquitatem Coordinatarum & Axis mutationem, effici poteſt ut alter ſit $y$ alter vero $x$, æquatio ergo ita ſe habebit

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byx^2 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0$$

exiſtente $mm$ minore quam $nn$.

Quia enim in ſupremo membro termini $y^2x$ & $yx^2$ neceſſario adſunt, in ſecundo membro termini $y^3$ & $x^3$ omitti poſſunt. Habebit ergo Curva duas Aſymtotas rectas, alteram æquatione $y = 0$, alteram æquatione $x = 0$, expreſſam. Prioris ergo indoles exponetur hac æquatione $nnyx^2 + exx + gx + h = 0$; poſterioris hac $xy^2 + cyy + fy + h = 0$. Hinc formabitur.

### GENUS II.

Duabus Aſymtotis rectis, utraque indolis $u = \frac{A}{t}$, præditum, ſi neque $c$ neque $e$ ſit quantitas evaneſcens.

### GENUS III.

Duas habet Aſymtotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{t}$, alteram indolis $u = \frac{A}{tt}$, & exprimitur æquatione

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + gx + h = 0,$$

exiſtente neque $c = 0$, neque $g = 0$.

### GENUS IV.

Duas habet Aſymtotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{t}$, alteram $u = \frac{A}{t^2}$, & continetur hac æquatione

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + h = 0,$$

non existente $c = 0$.

### GENUS V.

Duas habet Asymtotas rectas, ambas generis $u = \frac{A}{tt}$, & continetur æquatione

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + fy + gx + h = 0,$$

existente neque $f = 0$, neque $g = 0$.

### GENUS VI.

Duas habet Asymtotas rectas, alteram indolis $u = \frac{A}{tt}$, & alteram indolis $u = \frac{A}{t}$, continetur autem hac æquatione

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + fy + h = 0,$$

non existente $f = 0$.

### GENUS VII.

Duas habet Asymtotas rectas, ambas indolis $u = \frac{A}{t}$, & continetur hac æquatione.

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ayyx + byxx + dyx + h = 0,$$

existente ubique $nn$ majore quam $mm$.

## CASUS III.

263. Sint ambo illi Factores supremi membri, qui soli sunt reales, inter se æquales, atque æquatio erit hujusmodi,

$$yy(yy - 2myx + nnxx) + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0,$$

existente iterum $nn$ majore quam $mm$, quæ æquatio, nisi sit $b = 0$, dat

GENUS VIII.

Habens unam Asymtotam parabolicam speciei $uu = At$.

Si autem $b$ sit $= 0$, posito $x = \infty$, fiet $yy + \frac{ay}{nn} + \frac{e}{nn} + \frac{g}{nnx} + \frac{h}{nnxx} = 0$. Hinc, si fuerit $aa$ minor quam $4nne$, prodit

GENUS IX.

Nullum habens ramum in infinitum extensum.

Si fuerit $b = 0$, & $aa$ major quam $4nne$, neque sit $g = 0$, prodit

GENUS X.

Duas habens Asymtotas inter se parallelas speciei $u = \frac{A}{t}$.

Si fuerit & $b = 0$, & $g = 0$, & $aa$ major quam $4nne$ prodit

GENUS XI.

Duas habens Asymtotas inter se parallelas speciei $u = \frac{A}{tt}$.

Si fuerit $b = 0$, & $aa = 4nne$, nec vero $g = 0$, prodit

GENUS XII.

Asymtotam habens hyperbolicam speciei $uu = \frac{A}{t}$.

Si fuerit $b = 0$, $g = 0$, & $aa = 4nne$, atque $h$ quantitas negativa, prodit

GENUS XIII.

Asymtotam habens hyperbolicam speciei $uu = \frac{A}{tt}$.

At, si $b = 0$, $g = 0$, $aa = 4nne$, & $h$ quantitas affirmativa, prodit

GENUS XIV.

Nullos prorſus habens ramos in infinitum extenſos.

CASUS IV.

264. Sint membri ſupremi omnes quatuor Factores ſimplices reales & inæquales, atque æquatio hujuſmodi formam habebit $yx(y-mx)(y-nx)+ay^2x+byxx+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0$.

Curva igitur quatuor habebit Aſymtotas rectas ſpeciei vel $u=\frac{A}{t}$, vel $u=\frac{A}{tt}$, vel $u=\frac{A}{t^3}$. Hinc, ad præceptum §. 251. datum, ſequentia oriuntur Genera.

GENUS XV.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas omnes ſpeciei $u=\frac{A}{t}$.

GENUS XVI.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, tres ſpeciei $u=\frac{A}{t}$, & unam ſpeciei $u=\frac{A}{tt}$.

GENUS XVII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, tres ſpeciei $u=\frac{A}{t}$, & unam ſpeciei $u=\frac{A}{t^3}$.

GENUS XVIII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u=\frac{A}{t}$, & duas ſpeciei $u=\frac{A}{tt}$.

GENUS

GENUS XIX.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, unam ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, & unam ſpeciei $u = \frac{A}{t}$.

GENUS XX.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u = \frac{A}{t}$, & duas ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XXI.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, omnes ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$.

GENUS XXII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, tres ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, & unam ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XXIII.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, duas ſpeciei $u = \frac{A}{tt}$, & duas ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

GENUS XXIV.

Habens quatuor Aſymtotas hyperbolicas, omnes ſpeciei $u = \frac{A}{t^3}$.

CASUS V.

265. Sint duo Factores membri ſupremi inter ſe æquales; reliquis exiſtentibus inæqualibus, æquatio erit hujuſmodi

LIB. II. $yyx(y+nx)+ayxx+bx^3+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$

Hinc primo, ratione Factorum æqualium, omnia oriuntur Genera, quæ in *casu III*, & unumquodque cum tot varietatibus occurrit, quot Factores inæquales suggerunt, hoc est quot casus secundus continet Genera. Omnino ergo sexies septem hoc est quadraginta-duo Genera ex hoc casu nascuntur. Duo autem hinc prodeunt Genera impossibilia, nempe si ambæ Asymtotæ parallelæ fuerint speciei $u=\frac{A}{tt}$, & reliquarum una $u=\frac{A}{t}$, altera existente vel $u=\frac{A}{tt}$, vel $u=\frac{A}{t^3}$. Quare, hic casus quadraginta Genera præbet, quæ cum antecedentibus numerum Generum *sexaginta-quatuor* conficiunt, quæ singula hic describere nimis foret longum. Neque etiam, quia singula hæc Genera evolvere non vacavit, firmiter affirmare licet, omnia esse realia. Qui autem secundum præcepta data hoc negotium in se suscipere voluerit, numerum Generum, si opus fuerit, restringet atque emendabit.

## CASUS VI.

266. Hic casus, quo duo Factorum æqualium paria adsunt, ista æquatione continebitur

$$yyxx+ay^3+bx^3+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0.$$

Utrumque autem Factorum æqualium par in se spectatum varietates dat septem, unde ambo paria præbebunt Genera quadraginta-novem. Quia vero $h$ simul affirmativum & negativum esse nequit, duo Genera fiunt impossibilia, ideoque ex hoc casu omnino nascuntur Genera quadraginta-septem, qui numerus etiam major est quam ut singula hic recenseri queant. Hactenus ergo nacti sumus Genera *centum & undecim*.

## CASUS VII.

267. Si tres Factores inter se fuerint æquales, æquatio erit ejusmodi
$$y^3x + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$
Hic Factor $x$ præbet Asymtotam speciei $u = \frac{A}{t}$, si non fuerit $c = 0$; at, si $c = 0$, nec vero $f = 0$, Asymtotam dat speciei $u = \frac{A}{tt}$; at, si $c = 0$, & $f = 0$, Asymtotam dat speciei $u = \frac{A}{t^3}$. Deinde Factor $y^3$, nisi fuerit $b = 0$, dat Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = Att$; sin autem $b = 0$, posito $x$ infinito, fit $y^3 + ayx + dy + ex + g + \frac{cyy + fy + h}{x} = 0$. Hic, si non sit $e = 0$, erit $y^3 + ayx + ex = 0$; unde, si nec $a = 0$, erit & $y^3 + ax = 0$ & $ay + e = 0$: simul ergo locum habet Asymtota parabolica speciei $uu = At$, & hyperbolica hac æquatione expressa $(ay + e)x - \frac{e^3}{a^3} - \frac{de}{a} - g + \frac{cee - afe + aah}{aax}$. Nisi ergo sit $e^3 + aade + a^3g = 0$, hæc Asymtota est speciei $u = \frac{A}{t}$; contra vero speciei $u = \frac{A}{tt}$. At, si $a = 0$, non existente $e = 0$, erit $y^3 + ex = 0$: quæ dat Asymtotam parabolicam speciei $u^3 = At$. Sin autem sit $e = 0$, & $a = 0$, fiet $y^3 + dy + g = 0$, quæ æquatio vel unicam præbet Asymtotam speciei $u = \frac{A}{t}$, vel tres ejusdem speciei, vel unam speciei $u = \frac{A}{t}$, & unam speciei $uu = \frac{A}{t}$; vel unam speciei $u^3 = \frac{A}{t}$. Omnino ergo octo varietates occurrunt, quæ, per tres ex Factore $x$ ortas multiplicatæ, dabunt Genera viginti-quatuor. Ergo omnes casus hactenus tractati dant Genera *centum triginta quinque*.

## CASUS VIII.

268. Si omnes Factores ſint inter ſe æquales, hæc æquatio locum habebit
$y^4+ay^2x+byxx+kx^3+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0$.
Hic, ſi non fuerit $k=0$, prodit

### Genus CXXXVI.

Unicam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^4=At^3$.

Sit $k=0$, non vero $b=0$, erit $y^4+byxx+exx=0$, hincque $y^3+bxx=0$, & $by+e=0$; unde, pro Aſymtota recta $by+e=0$, erit $(by+e)xx+\frac{e^4}{b^3}+\frac{ae^2x}{bb}+\frac{cee}{bb}-\frac{dex}{b}-\frac{ef}{b}+gx+h=0$; ergo, niſi ſit $aee-bde+bbg=0$, Aſymtota erit ſpeciei $u=\frac{A}{t}$; contra vero ſpeciei $u=\frac{A}{tt}$: unde prodeunt

### Genus CXXXVII.

Unam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3=Att$, & unam hyperbolicam ſpeciei $u=\frac{A}{t}$, &

### Genus CXXXVIII.

Unam habens Aſymtotam parabolicam ſpeciei $u^3=Att$, & unam hyperbolicam ſpeciei $u=\frac{A}{tt}$.

269. Sit jam $k=0$, $b=0$, ut ſit
$$y^4+ay^2x+cyy+dyx+exx+fy+gx+h=0,$$
ſi non ſit $e=0$, erit $y^4+ayyx+exx=0$, quæ æquatio ſi fuerit $aa$ minor quam $4e$, eſt impoſſibilis, ſin $aa$ major quam

$4e$, duas præbet Afymtotas parabolicas ad eundem Axem relatas, fpeciei $uu = At$; fin $aa = 4e$, hæ duæ Parabolæ in unam coeunt, quibus Genera CXXXIX. CXL. & CXLI. conftituuntur.

At, fi $e = 0$, ut habeatur hæc æquatio

$$y^4 + ayyx + cyy + dyx + fy + gx + h = 0,$$

fi non fit $a = 0$; erit $y^4 + ayyx + cyy + dyx + gx = 0$, ergo & $yy + ax = 0$, & $y =$ conftanti, erit $ayy + dy + g = 0$, unde $y$ vel duos habet valores diverfos, vel æquales, vel nullum realem. Cafu primo Curva, præter unam Afymtotam parabolicam, habebit duas Afymtotas parallelas fpeciei $u = \frac{A}{t}$; fecundo unam fpeciei $uu = \frac{A}{t}$; tertio nullam: unde iterum tria Genera conftituuntur nempe CXLII. CXLIII. & CXLIV.

270. Sit nunc etiam $a = 0$, ut fit

$$y^4 + cyy + dyx + fy + gx + h = 0.$$

Hic, fi non fit $d = 0$, Curva habebit Afymtotam parabolicam fpeciei $u^3 = At$, & unam rectam æquatione $dy + g = 0$, contentam, fpeciei $u = \frac{A}{t}$. Denique fi & $d = 0$, Curva unam habebit Afymtotam parabolicam fpeciei $u^4 = At$: ficque omnino Linearum quarti ordinis conftituta funt Genera *centum quadraginta-fex*; quæ autem fingula plerumque plures Species notabiliter differentes fub fe complectuntur.

271. Ex his jam clare perfpicitur quantopere Generum numerus in Lineis quinti, altiorifve ordinis, multiplicetur, ut recenfio, qualem pro ordine tertio fecimus, inftitui prorfus nequeat, nifi quis integrum volumen huic operi deftinare velit. Quod autem ad primarias proprietates Linearum quarti altiorifve ordinis attinet, eæ ex æquatione generali fimili modo derivabuntur, quo fupra in Lineis tertii ordinis fumus ufi, neque idcirco earum explicationi immorabimur.

## CAPUT XII.

### *De investigatione figuræ Linearum Curvarum.*

272. Quæ in his Capitibus sunt exposita, inserviunt figuræ Linearum curvarum in infinitum extensarum cognoscendæ. Cujusmodi vero figuram habeat quæpiam Linea curva in spatio finita, sæpe numero difficillimum est ex æquatione cognoscere. Oportet enim ad hoc pro quavis Abscissa finita valores Applicatæ respondentes singulos ex æquatione eruere, atque reales ab imaginariis discernere : quod negotium, si æquatio sit altioris gradus, plerumque vires Analyseos cognitæ superat. Quod si enim Abscissæ valor quinque cognitus tribuatur, Applicata in æquatione incognitæ vicem sustinebit. Hincque a numero dimensionum, quem Applicata obtinet, pendebit æquationis resolutio. Negotium autem hoc per reductionem æquationis ad formam simpliciorem, dum & Axis commodissimus, & inclinatio Coordinatarum aptissima assumitur, valde sublevari potest: tum etiam quia perinde est, utra Coordinatarum pro Abscissa accipiatur, labor maxime diminuetur, si ea Coordinatarum, cujus paucissimæ dimensiones in æquatione occurrunt, pro Applicata assumatur.

273. Sic, si figuras Linearum tertii ordinis, quæ ad Speciem primam pertinent, investigare velimus, assumemus æquationem pro hac Specie simplicissimam, §. 258. exhibitam, & ex Coordinatis $t$ & $u$ priorem $t$ pro Applicata, alteram vero $u$ pro Abscissa, quia $t$ duas tantum dimensiones habet. Hujusmodi ergo æquationis formam habebimus,

$$yy = \frac{2by + axx + cx + d - nnx^3}{x}$$

quæ resoluta dat

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)}}{x}$$

existente neque $b$ neque $n = 0$.

274. Qui ergo valores ipsius $x$ Functioni $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ valorem affirmativum induunt, iis duplex Applicata respondet; quibus casibus vero hæc Functio evanescit, iisdem unica Applicata $y$ Abscissæ $x$ convenit, seu binæ Applicatæ inter se fiunt æquales. At, si Functio illa valorem negativum obtinet, tum Abscissæ nulla prorsus Applicata respondet. Sed valores istius Functionis, si fuerint affirmativi, in negativos abire nequeunt, nisi prius facti sint æquales, seu Functio evanuerit. Casus igitur potissimum erunt considerandi, quibus Functio $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ fit $= 0$; quod quidem certo duobus evenit casibus: quoniam, si $x$ certum limitem sive affirmative sive negative transgrediatur, ejus valor fit negativus. Hinc tota Curva determinato Abscissæ spatio respondebit, ultra quod omnes Applicatæ fiant imaginariæ.

275. Ponamus expressionem $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ duos tantum habere Factores reales, seu duobus tantum casibus evanescere posse; quod eveniat, si Abscissa determinetur in punctis $P$ & $S$, ubi unica tantum Applicata reperiatur. Per totum ergo spatium $PS$ Applicatæ erunt geminæ & reales, extra spatium vero $PS$ omnes Applicatæ erunt imaginariæ: ideoque tota Curva intra Applicatas $Kk$ & $Nn$ jacebit. Applicata vero in initio Abscissarum $A$ erit Asymtota Curvæ, quæ præterea Curvam in puncto quopiam secabit; si enim ponatur $x = 0$, fiet $\sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)} = b + \frac{dx}{2b}$ unde erit $y = \frac{b \pm (b + \frac{dx}{2b})}{x}$, hoc est, erit vel $y = \infty$, vel $y = \frac{-d}{2b}$. Curva ergo hoc casu ejusmodi habet formam qualem *Figura* 50. repræsentat. TAB. XIII. *Fig.* 49.

276. Ponamus expressionem $bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$ quatuor habere Factores simplices reales inæquales; ideoque quatuor casibus evanescere. In totidem ergo locis $P$, $Q$, $R$ TAB. XIII.

 & $S$ Applicatæ Curvam in unico puncto ſtringent. Cum igitur Applicatæ per Axis ſpatium $XP$ fuiſſent imaginariæ, nunc per ſpatium $PQ$ erunt reales: tum vero per ſpatium $QR$ erunt iterum imaginariæ, ac per $RS$ rurſus reales. Extra $S$ vero verſus $Y$ denuo fient imaginariæ. Hinc Curva conſtabit duabus partibus a ſe invicem ſeparatis, quarum altera intra rectas $Kk$ & $Ll$, altera intra rectas $Mm$ & $Nn$ continetur. Cum vero in Abſciſſarum initio $A$ Applicatæ ſint reales, neceſſe eſt ut id vel in Axis intervallo $PQ$ vel $RS$ ſit ſitum. Hoc ergo caſu Curva figuram habebit, qualem *Figura* 51. oſtendit, ſcilicet conſtabit Ovali a reliqua Curva ad Aſymtotam $DE$ relata, diſtante, quæ vocatur OVALIS CONJUGATA.

TAB. XIV.

277. Si duæ radices fiant inter ſe æquales, vel puncta $P$ & $Q$, vel $Q$ & $R$, vel $R$ & $S$, conveniunt. Verum, ſi prius eveniat, quia $A$ intra $P$ & $Q$ jacet, utraque radix deberet eſſe $x$; quod quia $b$ deeſſe nequit, fieri non poteſt. Sin autem puncta $R$ & $S$ conveniant, Ovalis conjugata fiet infinite parva, & abibit in PUNCTUM CONJUGATUM. At, ſi puncta $Q$ & $R$ conveniant, Ovalis cum reliqua Curva ita conjungetur ut prodeat Curva NODATA *Figuræ* 52. Quod ſi vero tres radices congruant, ſeu puncta $Q$, $R$ & $S$ conveniant, tum nodus in CUSPIDEM acutiſſimam evaneſcet, qualem *Figura* 53. repræſentat. Sic igitur quinque diverſæ varietates in ſpecie prima locum habent, ex quibus NEWTONUS totidem conſtituit Species.

TAB. XIV.

TAB. XIX.

278. Simili modo ſubdiviſiones reliquarum Specierum a NEWTONO ſunt factæ, quoniam omnes æquationes ita ſunt comparatæ, ut altera Coordinata plures duabus non habeat diviſiones. Quando vero altera Coordinata unicam habet dimenſionem, forma Curvæ facillime cognoſcetur. Æquatio enim erit hujuſmodi $y = P$, exiſtente $P$ Functione quapiam rationali Abſciſſæ $x$; quinque ergo ipſi $x$ valor tribuatur, Applicata quoque ſemper unum obtinet valorem; ideoque Curva continuo tractu Axem utrinque in infinitum comitabitur. Si Functio $P$ ſit fracta, fieri poteſt, ut Applicata in uno pluribuſve

bufve locis fiat infinita, ideoque Curvæ Afymtotam exhibeat, quod evenit ubi denominator Functionis $P$ evanefcit. 

279. Ponatur ergo $y = \frac{P}{Q}$, atque iftas Applicatas infinitas oftendent omnes radices reales æquationis $Q = 0$: quælibet enim radix hujus æquationis, puta $x = f$, declarat, fi fumatur Abfciffa $x = f$, fore Applicatam $y$ infinitam, quia fit $Q = 0$. Tum vero patet, fi fuerint Applicatæ $y$ affirmativæ, dum effet $x$ major quam $f$, eafdem, facto $x$ minore quam $f$, futuras effe negativas; ideoque Applicata erit Afymtota fpeciei $u = \frac{A}{t}$: hocque de omnibus Factoribus inæqualibus eft tenendum. Sin autem denominator $Q$ duos habuerit Factores æquales, puta $(x - f)^2$, tum fi Applicatæ fint affirmativæ fumto $f$ majore quam $x$, manebunt affirmativæ fi ponatur $x$ minor $f$, eritque Applicata $y$, facto $x = f$, Afymtota fpeciei $uu = \frac{A}{t}$. At, fi denominator $Q$ tres habuerit Factores æquales, nempe $(x - f)^3$, tum Applicatæ ante & poft illam quæ fit infinita, diverfa habebunt figna, uti cafu primo.

280. Poft has æquationes facillime tractantur, quæ in hac forma continentur $yy = \frac{2Py - R}{Q}$, exiftentibus $P$, $Q$, & $R$ Functionibus quibufcunque integris Abfciffæ $x$. Cuique igitur Abfciffæ $x$ vel geminæ convenient Applicatæ vel nulla; duæ fcilicet prodeunt Applicatæ, fi fuerit $PP$ major quam $QR$, & nulla, fi $PP$ minor quam $QR$: in quolibet ergo limite, qui Applicatas reales ab imaginariis feu nullis dirimit, erit $PP = QR$; ideoque fit $y = \frac{P}{Q}$, feu hæc Applicata Curvam in unico puncto ftringet vel tanget. Ad Curvæ ergo formam cognofcendam confideretur æquatio $PP - QR = 0$, cujus fingulæ radices reales dabunt loca, ubi Applicatæ Curvam in unico puncto ftringunt. Notentur hæc puncta in Axe,

LIB. II. atque, si omnes radices fuerint inæquales, Axis partes inter hæc puncta contentæ alternatim habebunt Applicatas geminas reales, & imaginarias, sicque Curva tot constabit partibus a se invicem sejunctis, quot hujusmodi alternationes adesse deprehenduntur, unde Ovales conjugatæ originem ducunt.

281. Si æquationis $PP - QR = 0$, duæ radices fiant æquales, tum illorum in Axe notatorum punctorum duo conveniunt, hincque in Axe portio vel imaginarias habens Applicatas vel reales evanescet. Priori casu Curva prodibit nodata

TAB. XIV. uti in *Figura* 52; posteriori Ovalis conjugata in punctum conjugatum evanescet. Quod si autem illa æquatio tres habuerit radices æquales, Nodus fiet infinite parvus atque in Cuspidem

TAB. XIV. abibit, ut in *Figura* 53; si quatuor affuerint radices æquationis æquales, vel duæ Ovales separatæ concrescent in punctum, vel in ipsa Cuspide dabitur Nodus, seu duæ Cuspides ad verticem oppositæ. Sin quinque radices æquales affuerint, novæ fere formæ non proveniunt; Cuspis enim oritur in qua non una, ut ante, sed duæ Ovales in punctum coalescunt; neque etiam major radicum æqualium multitudo novum discrimen in figuris resultantibus producit.

282. Nodus seu intersectio duorum Curvæ ramorum vocari etiam solet PUNCTUM DUPLEX, propterea quod Linea recta Curvam in eo puncto secans; eam in duobus punctis secare censenda est. Atque, si per Nodum alius Curvæ ramus transiret, tum in hac intersectione nascetur punctum Curvæ *triplex*; punctum vero *quadruplex* orietur, si duo puncta duplicia conveniunt, ex quo genesis & natura punctorum quorumvis *multiplicium* perspicitur. Erit ergo etiam Ovalis evanescens, seu punctum conjugatum, punctum duplex, pariter ac Cuspis, quæ oritur a puncto conjugato cum reliqua Curva connexo.

283. Si æquatio, qua Applicata $y$ per Abscissam $x$ exprimitur, sit cubica vel altioris gradus, ita ut $y$ æquetur Functioni multiformi ipsius $x$; tum unicuique Abscissæ convenient vel tot Applicatæ, quot $y$ in æquatione habet dimensiones, vel earum numerus minuetur binario vel quaternario, vel senario

&c. Perpetuo ergo binæ applicatæ ſimul imaginariæ eſſe incipiunt, atque prius quam imaginariæ evadunt, inter ſe fiunt æquales. Hinc ex tranſitione ab imaginariis ad reales plures naſcuntur varietates, quæ autem cum his, quas modo explicavimus; vel conveniunt vel ex iis ipſis ſunt compoſitæ. Quod ſi autem pro plurimis Abſciſſis tam affirmativis quam negativis quærantur omnes Applicatæ valores, tum per hæc puncta inventa Curva facile delineabitur, ejuſque figura cognoſcetur. CAP. XII.

284. Illuſtremus hæc exemplo, quod, quamvis ortum ſit ex æquatione altioris gradus, tamen Applicata $y$ per ſolas radices quadratas exprimatur. Sit nimirum

$$2y = \pm\sqrt{(6x - xx)} \pm \sqrt{(6x + xx)} \pm \sqrt{(36 - xx)}$$

ex qua æquatione cuivis Abſciſſæ octuplex Applicata reſpondet. Perſpicuum autem eſt, ſi Abſciſſa $x$ ſtatuatur negativa, tum Applicatam fore imaginariam; quod idem evenit ſi Abſciſſa $x$ ſumatur major quam $6$: ex quo tota Curva intra limites $x = 0$, & $x = 6$ continebitur. Ponantur ergo pro $x$ ſucceſſive valores, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, eritque

| ſi | $x = 0$ | $x = 1$ | $x = 2$ | $x = 3$ | $x = 4$ | $x = 5$ | $x = 6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{(6x - xx)}$ | 0,000 | 2,235 | 2,828 | 3,000 | 2,828 | 2,235 | 0,000 |
| $\sqrt{(6x + xx)}$ | 0,000 | 2,645 | 4,000 | 5,196 | 6,324 | 7,416 | 8,484 |
| $\sqrt{(36 - xx)}$ | 6,000 | 5,916 | 5,656 | 5,196 | 4,470 | 3,316 | 0,000 |
| ſumma | 6,000 | 10,796 | 12,484 | 13,392 | 13,622 | 12,967 | 8,484 |
| hinc $y$ ſi | | | | | | | |
| $+ + +$ | 3,000 | 5,398 | 6,242 | 6,696 | 6,811 | 6,483 | 4,242 |
| $- + +$ | 3,000 | 3,163 | 3,414 | 3,696 | 3,983 | 4,248 | 4,242 |
| $+ - +$ | 3,000 | 2,753 | 2,242 | 1,500 | 0,487 | 0,933 | -4,242 |
| $+ + -$ | -3,000 | -0,518 | 0,586 | 1,500 | 2,341 | 3,167 | 4,242 |

Reliquæ quatuor ſignorum permutationes ab his tantum ratione ſignorum differunt. Hinc cuilibet Abſciſſæ octuplex Applicata reſpondet, quæ ſi in figura exhibeantur, prodibit Linea curva TAB. XIV. Fig. 54.

LIB. II. duplici plexu $AFBEcagbcDA$, & $afbECAGBCDa$ constans, duas habens Cuſpides in $A$ & $a$, & puncta duplicia ſeu ramorum interſectiones quatuor in $D$, $E$, $C$ & $c$.

---

## CAPUT XIII.

### *De Affectionibus Linearum Curvarum.*

285. QUEMADMODUM ſupra ramorum in infinitum extenſorum indolem ita deſcripſimus, ut Lineam rectam, vel Curvam ſimpliciorem, aſſignaverimus, quæ cum illa Curva in infinito confunderetur; ita in hoc Capite conſtituimus quamvis Curvæ portionem in ſpatio finito exiſtentem examini ſubjicere, atque rectam vel Curvam ſimpliciorem inveſtigare, quæ cum illa Curvæ portione ſaltem per minimum ſpatium congruat. Ac primo quidem patet omnem Lineam rectam, quæ Curvam tangit, in eo loco ubi tangit, cum tractu Lineæ curvæ congruere, ſeu cum Linea curva duo ad minimum puncta communia habere. Tum vero etiam aliæ Lineæ curvæ exhiberi poſſunt, quæ cum data Curvæ portione accuratius congruant, eamque quaſi oſculentur. His autem cognitis, ſtatus Lineæ curvæ in quovis loco, ejuſque affectiones clariſſime erunt perſpectæ.

TAB. XV. *Fig.* 55. 286. Sit igitur propoſita æquatio quæcunque inter Coordinatas $x$ & $y$ pro Curva quapiam. Tribuatur Abſciſſæ $x$ valor quiſpiam $AP = p$, & quærantur valores Applicatæ $y$ huic Abſciſſæ reſpondentes, qui ſi plures fuerint, ſumatur pro lubitu unus $PM = q$, eritque $M$ punctum in Curva, ſeu punctum per quod Curva tranſibit. Tum vero, ſi in æquatione inter $x$ & $y$ propoſita, loco $x$ ſcribatur $p$, & $q$ loco $y$, omnes æquationis termini ſe mutuo tollent, ita ut nihil remaneat. Jam, ad naturam illius Curvæ portionis, quæ per punctum $M$ tranſit, indagandam, ex $M$ ducatur recta $Mq$

Axi $AP$ parallela, quæ nunc pro Axe accipiatur, & vocetur hic nova Abſciſſa $Mq = t$, Applicata $qm = u$. Quia igitur punctum $m$ pariter in Curva eſt poſitum, ſi $mq$ uſque ad priorem Axem in $p$ producatur, atque $Ap = p + t$ in locum ipſius $x$, & $pm = q + u$ in locum ipſius $y$ ſubſtituatur, æquatio pariter identica prodire debet. CAP. XIII.

287. Facta autem hac ſubſtitutione in æquatione inter $x$ & $y$ propoſita, omnes termini, in quibus neque $t$ nec $u$ ineſt, ſe mutuo ſponte deſtruent, illique termini, qui novas Coordinatas $t$ & $u$ continent, ſoli ſupererunt. Hinc ergo ejuſmodi prodibit æquatio

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u + Htuu + \&c.;$$

ubi $A, B, C, D$, &c. ſunt quantitates conſtantes ex conſtantibus primæ æquationis & ipſis $p$ & $q$, quas nunc pro conſtantibus habemus, compoſitæ. Iſta igitur nova æquatione natura ejuſdem Curvæ exprimitur, verum ad Axem $Mq$ refertur, & in quo ipſum Curvæ punctum $M$ pro initio Abſciſſarum aſſumitur.

288. Ac primo quidem patet, ſi ponatur $Mq = t = 0$, tum quoque fore $qm = u = 0$, quia punctum $m$ in $M$ incidit. Deinde, quia tantum minimam Curvæ portionem circa $M$ verſantem indagare volumus, hoc impetrabimus, ſi pro $t$ valores quam minimos aſſumamus, quo caſu quoque $qm = u$ valorem habebit minimum; naturam enim Arcus $Mm$ quaſi evaneſcentis tantum deſideramus. Quod ſi vero pro $t$ & $u$ ſumantur valores quam minimi, termini $tt$, $tu$, & $uu$ multo adhuc erunt minores, atque ſequentes $t^3$, $t^2u$, $tuu$, $u^3$, &c., multo quoque erunt minores quam illi, & ita porro: quam ob cauſam, cum termini minimi præ aliis quaſi infinite majoribus omitti queant, remanebit iſta æquatio $0 = At + Bu$, quæ eſt æquatio pro Linea recta $M\mu$ per punctum $M$ tranſeunte, atque indicat hanc rectam, ſi punctum $m$ ad $M$ proxime accedat, cum Curva congruere.

LIB. II. 289. Erit ergo hæc recta $M\mu$ Tangens Curvæ in loco $M$, ideoque hinc ad quodvis punctum Curvæ $M$ Tangens $\mu MT$ duci potest. Silicet, cum ex æquatione $At + Bu = 0$, sit $\frac{u}{t} = \frac{-A}{B} = \frac{q\mu}{Mq}$, erit $q\mu : Mq = MP : PT = -A : B$. Ergo, cum sit $PM = q$, fiet $PT = \frac{-Bq}{A}$: vocari autem hæc Axis portio $PT$ solet SUBTANGENS. Ex his ergo hæc deducitur.

### REGULA

*Pro invenienda Subtangente.*

In æquatione pro Curva, postquam Abscissæ $x = p$ inventa fuerit satisfacere Applicata $y = q$, ponatur $x = p + t$, & $y = q + u$; ex terminis autem, qui per substitutionem oriuntur, ii tantum retineantur, in quibus $t$ & $u$ unicam dimensionem tenent, reliquis omnibus neglectis. Sicque ad duos tantum terminos $At + Bu = 0$ pervenietur: unde, cognitis $A$ & $B$, erit Subtangens $PT = \frac{-Bq}{A}$.

### EXEMPLUM I.

*Sit proposita Curva* Parabola, *cujus natura hac exprimitur æquatione* $yy = 2ax$, *existente* AP *Axe principali & A Vertice.*

Sumatur $AP = p$; &, si vocetur $PM = q$, erit $qq = 2ap$, seu $q = \sqrt{2ap}$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$, eritque $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at$: unde, per regulam, hi tantum termini $2qu = 2at$ retineantur, qui dant $at - qu = 0$, $\frac{u}{t} = \frac{a}{q} = \frac{-A}{B}$, erit ergo Subtangens $PT = \frac{qq}{a} = 2p$, ob $qq = 2ap$. Hinc Subtangens $PT$ erit dupla Abscissæ $AP$.

EXEMPLUM II.

*Sit Curva* Ellipsis *Centro* A *descripta*, *cujus æquatio est* $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$, *seu* $aayy + bbxx = aabb$.

Sumta ergo $AP = p$, &, posita $PM = q$, erit $aaqq + bbpp = aabb$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$; &; quoniam ii tantum termini retineri debent, in quibus $t$ & $u$ unicam habent dimensionem, reliqui statim omitti possunt; fietque $2aaqu + 2bbpt = 0$, unde $\frac{u}{t} = \frac{-bbp}{aaq} = \frac{-A}{B}$. Erit ergo Subtangens $PT = \frac{-B}{A}q = \frac{-aaqq}{bbp} = \frac{-aa+pp}{p}$: quæ expressio, cum sit negativa, indicat punctum $T$ in partem contrariam cadere. Ceterum hæc expressio egregie convenit cum determinatione Tangentium Ellipsis supra tradita.

EXEMPLUM III.

*Sit proposita* Linea tertii ordinis *Speciei septimæ* $yyx = axx + bx + c$.

Sumta ergo $AP = p$, & posita $PM = q$, erit $pqq = app + bp + c$. Jam statuatur $x = p + t$ & $y = q + u$, eritque $(p+t)(qq + 2qu + uu) = a(pp + 2pt + tt) + b(p+t) + c$. Rejectis omnibus terminis superfluis, erit $2pqu + qqt = 2apt + bt$, unde fit $\frac{u}{t} = \frac{2ap + b - qq}{2pq} = \frac{-A}{B}$; ideoque Subtangens $PT = \frac{-B}{A}q = \frac{2pqq}{2ap + b - qq} = \frac{2app + 2bp + 2c}{2ap + b - qq} = \frac{2ap^3 + 2bpp + 2cp}{app - c}$, vel $PT = \frac{2ppqq}{app - c}$.

290. Cognita ergo hoc modo Tangente Curvæ, simul cognoscitur directio, quam Curva sequitur in puncto $M$. Linea enim Curva aptissime considerari potest tamquam via, quam describit punctum continuo promotum cum variata continuo

 motus directione. Ideoque punctum, quod Curvam $M\mu$ motu suo describit in $M$ promovebitur secundum directionem Tangentis $M\mu$; quam directionem si conservaret, describeret rectam $M\mu$: at e vestigio directionem motus inflectit, si quidem Lineam curvam describit: unde ad tractum Lineæ curvæ cognoscendum in singulis punctis positionem Tangentis definire oportet, id quod facile fit methodo hic tradita, neque enim ulla ostenditur difficultas, dummodo æquatio pro Curva proposita fuerit rationalis atque a fractionibus libera. Ad talem autem formam æquationes omnes semper reduci possunt. Sin autem æquatio fuerit vel irrationalis vel fractionibus implicata, neque eam ad formam rationalem & integram reducere vacaverit, tum eadem quidem methodus, at cum moderatione quadam, adhiberi potest, quæ ipsa moderatio *Calculum differentialem* produxit; quam ob rem methodum inveniendi Tangentes, si æquatio pro Curva proposita non fuerit rationalis & integra, in calculum differentialem reservabimus.

291. Hinc ergo innotescit inclinatio Tangentis $M\mu$ ad Axem $AP$, seu ejus parallelam $Mq$. Cum enim sit $q\mu : Mq = -A : B$, si Coordinatæ fuerint orthogonales ideoque angulus $Mq\mu$ rectus, erit $\frac{-A}{B}$ Tangens anguli $qM\mu$; sin autem Coordinatæ fuerint obliquangulæ, tum ex angulo $Mq\mu$ dato & ratione laterum $Mq$, $q\mu$ per Trigonometriam reperietur angulus $qM\mu$. Patet autem, si in æquatione resultante $At + Bu = 0$, fuerit $A = 0$, tum angulum $qM\mu$ evanescere, ideoque Tangentem $M\mu$ fore Axi $AP$ parallelam. Sin autem fuerit $B = 0$; tum Tangens $M\mu$ Applicatis $PM$ erit parallela, seu ipsa Applicata $PM$ Curvam in puncto $M$ tanget.

292. Inventa Tangente $MT$, si ad eam in puncto contactus $M$ ducatur normalis $MN$, erit hæc ad ipsam Curvam simul normalis; cujus propterea positio quovis casu facile reperitur. Commodissime autem exprimitur, si Coordinatæ $AP$ & $PM$ fuerint orthogonales, tum enim erunt triangula $Mq\mu$ & $MPN$

similia;

similia, ideoque $Mq : q\mu = MP : PN$, seu $-B : A = q : PN$; unde fit $PN = \frac{-Aq}{B}$. Vocari autem hæc Axis portio $PN$, inter Applicatam & Normalem $MN$ intercepta, solet SUBNORMALIS. Hæc igitur Subnormalis, si Coordinatæ fuerint orthogonales, ex inventa Subtangente $PT$ facillime definitur; erit enim $PT : PM = PM : PN$, seu $PN = \frac{PM^2}{PT}$. Præterea vero, si angulus $APM$ fuerit rectus, erit ipsa tangens $MT = \surd(PT^2 + PM^2)$ & ipsa normalis $MN = \surd(PM^2 + PN^2)$; seu, cum sit $PT : TM = PM : MN$, erit $MN = \frac{PM.TM}{PT} = \frac{PM}{PT}\surd(PT^2 + PM^2)$.

CAP. XIII.

293. Quoniam vidimus, si in æquatione $At + Bu = 0$, fuerit vel $A = 0$ vel $B = 0$, tum Tangentem fore vel Axi vel Applicatis parallelam; superest casus, quo uterque coëfficiens $A$ & $B$ simul fit $= 0$, considerandus. Hoc ergo cum evenit, in æquatione supra (§. 286.) inventa, sequentes termini, in quibus $t$ & $u$ duas obtinent dimensiones, non amplius præ his $At + Bu$, (qui ipsi evanescunt,) negligi poterunt. Hanc ob rem considerandā veniet hæc æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$, neglectis sequentibus terminis; quippe qui præ his, si $t$ & $u$ statuantur infinite parva, evanescunt. Ex hac igitur æquatione, uti ex generali, manifestum est, si ponatur $t = 0$, fore & $u = 0$, ideoque $M$ esse punctum in Curva, quod quidem Hypothesi est consentaneum.

294. Cum igitur hæc æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$ statum Curvæ prope punctum $M$ declaret; manifestum est, si fuerit $DD$ minor quam $4CE$, tum æquationem fore imaginariam, nisi sint $t$ & $u = 0$. Hoc igitur casu punctum $M$ quidem ad Curvam pertinebit, verum erit sejunctum a reliqua Curva; eritque ideo Ovalis conjugata in punctum evanescens, cujusmodi casum in Capite præcedente notavimus. Hic igitur ne idea quidem Tangentis locum habet; quia, si Tan-

LIB. II. gens eſt recta duo puncta proxima cum Curva habens communia, punctum a recta tangi hoc modo non poteſt. Hoc itaque pacto punctum conjugatum, ſi quod datur in Curva quapiam, agnoſcetur atque a reliquis Curvæ punctis diſcernetur.

TAB. XV. Fig. 56. 295. Quod ſi autem fuerit $DD$ major quam $4CE$, æquatio $0 = Ctt + Dtu + Euu$ reſolubilis erit in duas æquationes hujus formæ $\alpha t + \beta u = 0$, quarum utraque in Curvæ naturam æque competit. Cum igitur utraque poſitionem Tangentis ſeu directionem Curvæ in puncto $M$ exhibeat, neceſſe eſt ut duo Curvæ rami ſe in puncto $M$ decuſſent, ibique punctum duplex conſtituant. Sumta ſcilicet $Mq = t$, ſint $q\mu$ & $q\nu$ ambo valores ipſius $u$, quos illa æquatio præbet, atque rectæ $M\mu$ & $M\nu$ erunt ambæ Tangentes Curvæ in puncto $M$. In $M$ ergo erit interſectio duorum Curvæ ramorum, quorum alter ſecundum $M\mu$, & alter ſecundum $M\nu$ dirigitur. Cum igitur punctum conjugatum pariter pro puncto duplici ſit habendum, hæc æquatio $Ctt + Dtu + Euu = 0$, ſemper punctum duplex indicabit, quemadmodum æquatio $At + Bu = 0$, quoties locum habet, punctum Curvæ tantum ſimplex declarat.

296. Sin autem fuerit $DD = 4CE$, tum ambæ iſtæ Tangentes $M\mu$ & $M\nu$ coincident, & angulus $\mu M\nu$ evaneſcet; ex quo intelligitur duos Curvæ ramos in $M$ non ſolum concurrere, ſed etiam eandem directionem habere, ideoque ſe invicem tangere; quo caſu punctum $M$ nihilominus erit duplex, quia recta per hoc punctum ducta Curvam hoc loco in duobus punctis ſecare eſt cenſenda. Quando ergo in æquatione, quam § 286. obtinuimus, ambo coëfficientes primi $A$ & $B$ evaneſcunt, tum concludenda eſt Curva in $M$ punctum duplex habere, cujus tres dantur Species diverſæ; vel Ovalis in punctum evaneſcens ſeu punctum conjugatum, vel duorum Curvæ ramorum interſectio mutua ſeu nodus, vel duorum Curvæ ramorum contactus, quas diverſas puncti duplicis Species triplex æquationis $0 = Ctt + Dtu + Euu$ conſtitutio definit.

297. Si præter coëfficientes $A$ & $B$, etiam hi tres $C$, $D$, & $E$ omnes evanescant, tum sequentes sumi debebunt termini, in quibus $t$ & $u$ tres obtinent dimensiones, eritque $Ft^3 + Gttu + Htuu + Iu^3 = 0$. Quæ æquatio si unicum habeat Factorem simplicem realem, hic ostendet unum Curvæ ramum per punctum $M$ transeuntem ejusque simul directionem seu Tangentem; bini vero reliqui Factores imaginarii in ipso puncto $M$ Ovalem evanescentem, arguent. Sin autem omnes radices illius æquationis fuerint reales, hinc cognoscetur tres Curvæ ramos se in eodem puncto $M$ vel decussare vel tangere, prout illæ radices fuerint vel inæquales vel æquales. Quicquid horum evenerit, Curva in $M$ semper habebit punctum triplex, atque recta per $M$ ducta Curvam simul in tribus punctis secare putanda est.

298. Quod si præter omnes coëfficientes præcedentes etiam hi quatuor $F$, $G$, $H$, & $I$ evanescant; tum ad naturam puncti Curvæ $M$ cognoscendam, contemplari oportebit terminos æquationis sequentes, in quibus $t$ & $u$ quatuor habeant dimensiones: unde punctum $M$ quadruplex erit judicandum. In eo enim vel duæ Ovales conjugatæ coalescunt; quod evenit si æquationis quarti gradus omnes radices fuerint imaginariæ. Vel in $M$ intersectio seu contactus duorum Curvæ ramorum cum puncto conjugato; quod evenit si duæ radices fuerint reales, duæ reliquæ vero imaginariæ. At in $M$ denique erit intersectio quatuor Curvæ ramorum, si omnes radices æquationis fuerint reales; intersectio autem vel duorum vel trium vel omnium quatuor abibit in contactum, si duæ tres vel omnes quatuor radices fiant æquales. Simili autem modo in judicio erit progrediendum, si etiam his terminis, ubi $t$ & $u$ quatuor obtinent dimensiones, evanescentibus, procedendum erit ad terminos quinque ulteriorumve dimensionum.

299. His perpensis, facile erit æquationem generalem pro omnibus Curvis invenire, quæ non solum per punctum $M$ transeant, sed etiam in $M$ habeant punctum vel simplex vel

LIB. II. duplex, vel triplex, vel totuplex, prout quis voluerit. Positis enim $AP = p$, $PM = q$, ac denotantibus $P$, $Q$, $R$, $S$, &c. Functiones quascunque Coordinatarum $x$ & $y$, manifestum est hanc æquationem $P(x-p) + Q(y-q) = 0$, exprimere Curvam per punctum $M$ transeuntem; si enim ponatur $x = AP = p$, fiet $y = PM = q$; dummodo neque $P$ per $y-q$, nec $Q$ per $x-p$ fuerit divisibile, vel dummodo hi Factores $x-p$ & $y-q$, a quibus transitus Curvæ per punctum $M$ pendet, ex æquatione per divisionem non eliminentur. Perspicuum autem est omnes Curvas, quæ quidem per punctum $M$ transeant, in ista æquatione $P(x-p) + Q(y-q) = 0$, contineri; erit vero $M$ punctum simplex, si hæc æquatio non fuerit ejus formæ, qualem pro punctis multiplicibus mox exhibebimus.

300. Si $M$ debeat esse punctum duplex, æquatio pro Curva in hac forma generali continebitur $P(x-p)^2 + Q(x-p)(y-q) + R(y-q)^2 = 0$, dummodo hæc forma per divisionem non pereat. Perspicitur hinc in Lineas secundi ordinis punctum duplex cadere non posse, quo enim illa æquatio secundi tantum sit, necesse est ut $P$, $Q$, & $R$ sint quantitates constantes; tum autem æquatio non erit pro Linea curva, sed pro duabus rectis. Sin autem $P$, $Q$, $R$ sint Functiones primi ordinis, ut $\alpha x + \beta y + \gamma$, tum Lineæ habebuntur tertii ordinis in $M$ punctum duplex habentes. At vero Linea tertii ordinis, nisi ex tribus rectis constet, plus uno puncto duplici habere nequit. Ponamus enim dari duo puncta duplicia, atque per ea Lineam rectam duci; hæc Linea recta Curvam in quatuor punctis secaret, quod naturæ Linearum tertii ordinis adversatur. Linea quarti ordinis duo tantum habebit puncta duplicia; Linea quinti ordinis plura tribus habere non poterit, & ita porro.

301. Sit $M$ punctum Curvæ triplex, atque natura Lineæ curvæ hac exprimetur æquatione $P(x-p)^3 + Q(x-p)^2(y-q) + R(x-p)(y-q)^2 + S(y-q)^3 = 0$. Hæc æquatio igitur si Lineam curvam definiat, tertium ordinem

superabit; namque si $P$, $Q$, $R$, & $S$ essent constantes, quod Linearum tertii ordinis natura exigit, tum æquatio tres haberet Factores formæ $\alpha(x-p) + \mathcal{G}(y-q)$, ideoque foret pro tribus rectis. In Curvas ergo quarto ordine simpliciores punctum triplex non cadit; neque Lineæ quinti ordinis plus uno puncto triplici habere possunt, alioquin enim daretur recta Lineam quinti ordinis in sex punctis secans. Nihil autem impedit quo minus Linea sexti ordinis duo habeat puncta triplicia. CAP. XIII.

302. Si æquatio in hac forma contineatur: $P(x-p)^4 + Q(x-p)^3(y-q) + R(x-p)^2(y-q)^2 + S(x-p)(y-q)^3 + T(y-q)^4 = 0$, tum Curva in $M$ habebit punctum quadruplex. Linea ergo curva simplicissima, quæ puncto quadruplici gaudeat, ad Linearum ordinem quintum pertinebit. Duo vero puncta quadruplicia non cadunt nisi in Lineas aut octavi aut altioris gradus. Simili modo æquationes generales exhiberi possunt pro Lineis, quæ in $M$ habeant punctum quintuplex, vel pro lubitu multiplex.

303. Quod, si autem $M$ fuerit vel punctum duplex vel triplex vel utcunque multiplex, tum vel totidem Curvæ rami se mutuo in puncto $M$ secabunt sive tangent; vel, si numerus ramorum se intersecantium sit minor, tum unum plurave puncta conjugata in eodem puncto $M$ concrescent: qui Curvæ status cognoscetur ex iis, quæ ante sunt tradita. Scilicet, in Functionibus $P$, $Q$, $R$, $S$, &c., ubique loco $x$ & $y$ scribi debent $p$ & $q$, & $t$ & $u$ loco Factorum $x-p$ & $y-q$; tum enim prodibunt ejusmodi æquationes, ex quibus constitutio Curvæ & ramorum se in $M$ intersecantium Tangentes definiri poterunt.

# CAPUT XIV.

## *De curvatura Linearum curvarum.*

304. Quemadmodum in superiori Capite lineas rectas indagavimus, quæ in quovis puncto Lineæ curvæ ipsius directionem indicabant, ita hic Lineas curvas simpliciores investigabimus, quæ in quovis loco cum Curva proposita tam exacte congruant, ut saltem per minimum spatium quasi confundantur. Sic enim cognita indole Curvæ simplicioris, simul Curvæ propositæ natura inde colligetur. Simili methodo scilicet hic utemur, qua supra ad naturam ramorum in infinitum extensorum scrutandam sumus usi; primo videlicet investigando Lineam rectam, quæ Curvam tangat, deinde vero Lineam curvam simpliciorem, quæ cum Curva proposita multo magis conveniat, eamque non solum tangat, sed quasi osculetur. Vocari autem ejusmodi Linearum curvarum arctissimus contactus solet Osculatio.

TAB. XV. Fig. 55. 305. Sit igitur proposita æquatio quæcunque inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$, atque ad naturam minimæ Curvæ portionis $Mm$ circa punctum $M$ versantis indagandam, cum inventa sit Abscissa $AP = p$ & Applicata $PM = q$, ponatur in Axe $MR$ Abscissa minima $Mq = t$, & Applicata $qm = u$; eritque $x = p + t$, & $y = q + u$; quibus valoribus in æquatione substitutis, perveniatur ad hanc æquationem

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \&c.,$$

quæ exprimet naturam Curvæ ejusdem ad Axem $MR$ relatæ. Quoniam autem has novas Coordinatas $t$ & $u$ minimas statuimus, sequentes termini quasi infinities erunt minores quam antecedentes; ideoque præ his sine errore rejici poterunt.

306. Nisi ergo ambo coëfficientes primi $A$ & $B$ evanescant,

rejectis sequentibus terminis omnibus, æquatio $0 = At + Bu$ ostendet Lineam rectam $M\mu$ quæ Curvam in puncto $M$ tanget, hocque loco cum Curva communem habet directionem. Erit ergo $Mq : q\mu = B : -A$; unde, ob cognitas quantitates $A$ & $B$, positio Tangentis $M\mu$ innotescit, quæ cum Curvam in puncto tantum $M$ contingat, videamus quantum Curva $Mm$ porro a recta $M\mu$ saltem per minimum spatium aberret. In hunc finem assumamus normalem $MN$ pro Axe, in quem ex $m$ Applicata orthogonalis $mr$ ducatur, ac vocetur $Mr = r$; $rm = s$; erit $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$, & $r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$, & $s = \frac{Bt - Au}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$. Quare, cum sit

$$-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gttu + \&c.,$$

erit $r$ quantitas infinities minor, quam $t$ & $u$, ac propterea erit quoque $r$ quantitas infinities minor quam $s$; nam $s$ per $t$ & $u$, at $r$ per ipsarum $t$ & $u$ quadrata vel potestates superiores determinatur.

307. Naturam ergo Curvæ $Mm$ multo propius cognoscemus, si terminos quoque $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ in computum ducamus, atque sequentes tantum negligamus; sicque habebimus inter $t$ & $u$ hanc æquationem $-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$, in qua si loco $t$ & $u$ valores superiores substituamus, habebimus $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \frac{(A^2C + ABD + B^2E)rr}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE)rs}{A^2 + B^2} + \frac{(A^2E - ABD + B^2C)ss}{A^2 + B^2}$. At, quia $r$ infinities minor est quam $s$, termini $rr$ & $rs$ præ termino $ss$ evanescent, fietque $ss = \frac{(A^2 + B^2)r\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2B - ABD + B^2C}$, quæ æquatio exprimit naturam Curvæ Curvam propositam in $M$ osculantis.

308. Curvæ ergo Arcus minimus $Mm$ congruet cum Vertice Parabolæ super Axe $MN$ descriptæ, cujus Latus rectum

 seu Parameter est $= \frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$: unde qualis est curvatura hujus Parabolæ in vertice talis erit Curvæ propositæ curvatura in puncto $M$. Cum autem nullius Curvæ curvatura distinctius cognoscatur quam Circuli, quoniam ipsius curvatura ubique est eadem, eoque major existit, quo minor fuerit radius; commodius erit curvaturam Curvarum definire per Circulum æqualis curvaturæ, qui *Circulus osculator* vocari solet. Hanc ob rem oportebit Circulum definire cujus curvatura conveniat cum curvatura propositæ Parabolæ in ipsius Vertice, quo tum Circulum istum in locum Parabolæ osculantis substituere liceat.

309. Ad hoc efficiendum, contemplemur curvaturam Circuli tanquam incognitam, eamque modo exposito per curvaturam Parabolæ exprimamus, sic enim vicissim pro Parabola osculante Circulus osculator substitui poterit. Sit igitur Curva $Mm$ proposita Circulus radio $= a$ descriptus, cujus natura exprimetur æquatione $yy = 2ax - xx$. Sumta ergo $AP = p$, & $PM = q$ erit, $qq = 2ap - pp$. Jam ponatur $x = p + t$ & $y = q + u$, atque orietur hæc æquatio $qq + 2qu + uu = 2ap + 2at - pp - 2pt - tt$, quæ, ob $qq = 2ap - pp$, reducitur ad hanc formam $0 = 2at - 2pt - 2qu - tt - uu$, quæ cum superiori forma comparata dat $A = 2a - 2p$; $B = -2q$; $C = -1$, $D = 0$, & $E = -1$, unde fit $AA + BB = 4(aa + 2ap + pp + qq) = 4aa$, & $(AA + BB)\sqrt{(AA + BB)} = 8a^3$ atque $AAE - ABD + BBC = -AA - BB = -4aa$. Unde Circulum, cujus radius $= a$, in quovis puncto osculatur Parabolæ vertex, cujus natura exprimitur æquatione $ss = 2ar$; ideoque vicissim quam Curvam osculatur Vertex Parabolæ $ss = br$, eandem osculabitur Circulus, cujus radius est $= \frac{1}{2}b$.

310. Cum igitur supra invenerimus Curvam $Mm$ osculari Parabolam cujus æquatio sit $ss = \frac{(AA+BB)\sqrt{(A^2+B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}r$,

mani-

manifestum est ejusdem Curvæ curvaturam in $M$ convenire cum curvatura Circuli, cujus radius sit $= \frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$. Hæc ergo expressio dat radium Circuli osculatoris, atque iste radius quoque vocari solet *Radius osculi*; sæpe etiam *radius curvedinis* seu *curvatura* appellatur. Ex æquatione ergo inter $t$ & $u$, quam ex æquatione inter $x$ & $y$ proposita elicuimus, statim definiri potest radius osculi Curvæ in puncto $M$, seu radius Circuli osculantis Curvam in $M$. In æquatione enim inter $t$ & $u$ rejiciantur termini, in quibus $t$ & $u$ plures duabus dimensiones obtinent, atque ex æquatione, quæ erit hujus formæ

$$0 = At + Bu + Ctt + Dtu + Euu,$$

invenietur radius osculi $= \frac{(A^2+B^2)\sqrt{(A^2+B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

311. Quoniam vero signum radicale $\sqrt{(A^2+B^2)}$ ambiguitatem signi involvit, incertum est utrum ista expressio sit affirmativa an negativa, scilicet utrum concavitas Curvæ punctum $N$ respiciat, an convexitas. Ad hoc dubium tollendum quæri debet utrum Curvæ punctum $m$ intra Tangentem $M\mu$ versus Axem $AN$ sit positum, an vero extra Tangentem cadat. Priori casu Curva versus $N$ erit concava, atque Centrum Circuli osculantis in rectæ $MN$ portionem versus Axem protensam incidet; posteriori casu vero in portionem rectæ $NM$ ultra $M$ productam. Omnis ergo dubitatio evanescet si inquiratur, utrum $qm$ sit minor quam $q\mu$, an major; priori enim casu Curva versus $N$ erit concava, posteriori vero convexa.

312. Est vero $q\mu = \frac{-At}{B}$, & $qm = u$, quare videndum est utrum sit $\frac{-At}{B}$, major minorve quam $u$. Quia igitur $m\mu$ est Lineola quam minima, ponatur, $m\mu = w$ erit-

LIB. II. que $u = \frac{-At}{B} - w$; unde, facta fubftitutione, fit $o = -Bw + Ctt - \frac{ADtt}{B} - Dtw + \frac{A^2Ett}{BB} + \frac{2AEtw}{B} + Ew^2$; ubi, ob $w$ præ $t$ minimum, termini $tw$ & $w^2$ evanefcunt. Hinc fit $w = \frac{(B^2C - ABD + A^2E)tt}{B^3}$. Quod fi ergo $w$ fuerit quantitas affirmativa, quod evenit fi $\frac{B^2C - ABD + A^2E}{B}$, feu $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ fuerit quantitas affirmativa, tum Curva erit concava verfus $N$; fin autem $\frac{A^2E - ABD + B\,C}{B}$ fuerit quantitas negativa, Curvæ convexitas punctum $N$ refpiciet.

TAB. XV. Fig. 57. 313. Quo hæc clariora reddantur, diverfi cafus qui occurrere poffunt, feorfim funt evolvendi. Sit igitur primum $B = o$, quo cafu ipfa Applicata $PM$ erit Tangens Curvæ $Mm$, & radius ofculi erit $= \frac{A}{2b}$. Utrum autem Curva fit concava verfus $R$, uti Figura præfentat, an convexa, ex æquatione $o = At + Ctt + Dtu + Euu$ intelligitur. Cum enim fit $Mq = t$ & $qm = u$, ob $t$ infinities minus quam $u$, termini $tt$ & $tu$ præ $uu$ evanefcent, eritque $At + Euu = o$; ex qua æquatione intelligitur, fi coefficientes $A$ & $E$ habeant contraria figna, feu fi $\frac{E}{A}$ fuerit quantitas negativa, tum Curvam fore concavam verfus $R$. At, fi coëfficientes $A$ & $E$ habeant paria figna, & $\frac{E}{A}$ fuerit quantitas affirmativa, tum Curva ad alteram Tangentis partem erit fita; Abfciffa enim $Mq$ ftatui debet negativa quo Applicata $qm$ refpondeat realis.

TAB. XV. Fig. 55. 314. Sit nunc Tangens $M\mu$ inclinata ad Axem $AP$ feu ipfi parallelam, ita ut angulus $RM\mu$ fit acutus, & normalis $MN$ Axem in $N$ ultra $P$ fecet: quo cafu Abfciffis $t$ refpondebunt Applicatæ $u$ affirmativæ; unde coëfficientes $A$ & $B$

C A P. XIV.

ſigna habebunt diſparia, & fractio $\frac{A}{B}$ erit negativa. De hoc caſu jam ante vidimus Curvam fore concavam verſus $N$, ſi fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ quantitas affirmativa; vel, cum $\frac{B}{A}$ ſit quantitas negativa, ſi fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ quantitas negativa. Sin autem fuerit $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ quantitas negativa, ſeu $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ quantitas affirmativa, tum Curva verſus $N$ convexitatem obvertet. Utroque vero caſu radius oſculi erit $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

TAB. XV. Fig. 58.

315. Sit nunc $A = 0$, quo caſu recta $MR$ Axi parallela ſimul erit Curvæ Tangens, & $u$ infinities minor quam $t$; unde erit $0 = Bu + Ctt$. Quare, ſi $B$ & $C$ habeant æqualia ſigna, ſeu ſi $BC$ fuerit quantitas affirmativa, tum $u$ habere debet valorem negativum; ideoque Curva erit concava verſus punctum $P$, in quod $N$ incidit, quod ipſum regula ſuperior, facto $A = 0$, oſtendit; radius oſculi vero erit $= \frac{B}{2C}$. Hæc autem eadem regula, quæ ſupra eſt data, valet, ſi Tangens $MT$ ultra $P$ cum Axe concurrat; tum enim pariter Curva verſus $N$ erit vel concava vel convexa, prout hæc expreſſio $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$, fuerit vel affirmativa vel negativa, eritque radius oſculi ut ante $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$.

TAB. XV. Fig. 59.

TAB. XV. Fig. 60.

316. Sit propoſita Ellipſis, ſeu ſaltem ejus quadrans $DMC$, cujus Centrum $A$, alter ſemiaxis tranſverſus $AD = a$, alter ſemiaxis conjugatus $AC = b$. Sumtis ergo Abſciſſis $x$ in Axe $AD$ a Centro $A$, habebitur hæc æquatio pro Ellipſi $aayy + bbxx = aabb$. Sumta jam quapiam Abſciſſa $AP = p$, & poſita Applicata $PM = q$, erit $aaqq + bbpp = aabb$. Ponatur jam $x = p + t$, & $y = q + u$, erit $aaqq + 2aaqu +$

 $aauu + bbpp + 2bbpt + bbtt = aabb$, seu $2bbpt + 2aaqu + bbtt + aauu = 0$. Primum ergo, ob coëfficientes ipsarum $t$ & $u$, normalis $MN$ citra $P$ cum Axe concurrit: eritque $PM : PN = B : A = aaq : bbp$ & $PN = \frac{bbp}{aa}$, ob $A = 2bbp$ & $B = aaq$. Præterea vero, ob $C = bb$, $D = 0$ & $E = aa$, erit $\frac{AAE - ABD + B^2C}{B} = \frac{4aabb(aaqq + bbpp)}{2aaq} = \frac{4a^4b^4}{2aaq}$; ideoque quantitas affirmativa, qua indicatur Curvam versus $N$ esse concavam.

317. Ad ipsum jam radium osculi inveniendum, est $A^2 + B^2 = 4(a^4qq + b^4pp)$, & $A^2E - ABD + B^2C = 4a^4b^4$; unde radius osculi erit $= \frac{(a^4qq + b^4pp)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$. At est $MN = \sqrt{(qq + \frac{b^4pp}{a^4})}$, unde $\sqrt{(a^4qq + b^4pp)} = aa.MN$, ideoque radius osculi $= \frac{a^2.MN^3}{b^4}$. Si in normalem $MN$ productam ex Centro $A$ ducatur perpendiculum $AO$, erit, ob $AN = p - \frac{bbp}{aa}$ & triangula $MNP$ & $ANO$ similia, $NO = \frac{aabbpp - b^4pp}{a^4.MN}$ & $MO = NO + MN = \frac{aaqq + bbpp}{aa.MN} = \frac{bb}{MN}$; unde $MN = \frac{bb}{MO}$, hincque radius osculi $= \frac{aabb}{MO}$, quæ expressio ad utrumque Axem $AD$ & $AC$ æque est accommodata.

318. Invento autem pro quovis Curvæ loco radio osculi, natura Curvæ satis clare perspicitur. Si enim portio Curvæ in partes plurimas quam minimas dividatur, unaquæque particula haberi potest pro Arculo Circuli, cujus radius erit ipse radius osculi in eo loco. Hinc vero etiam descriptio Curvæ per plurima puncta multo accuratius absolvetur. Postquam

enim plura notata fuerint puncta, per quæ Curva transeat, si pro his singulis punctis primo quærantur Tangentes, hincque porro normales, atque tum radii osculi, portiunculæ Curvæ intra puncta inventa sitæ ope circini poterunt describi. Hocque modo eo accuratius vera Curvæ figura exprimetur, quo propiora fuerint puncta primum notata. CAP. XIV.

319. Quoniam igitur portiuncula Curvæ ad $M$ cum Arculo Circuli radio osculi descripti congruit, non solum elementum $Mm$, sed etiam præcedens $Mn$ eadem curvatura erit præditum. Cum enim natura minimæ Curvæ portionis $Mm$ exprimatur hujusmodi æquatione, $ss = \alpha r$ inter Coordinatas $Mr = r$ & $rm = s$, unicuique Abscissæ minimæ $Mr = r$, ex æquatione duplex respondebit Applicata $s$ altera affirmativa, altera negativa: ideoque Curva versus $n$ æque ac versus $m$ continuabitur. Ubicunque ergo radius osculi, qui est $= \frac{1}{2}\alpha$, finitam habet magnitudinem, ibi curvatura utrinque saltem per minimum spatiolum erit uniformis. Neque ergo his casibus Curva ex $M$ subito, formata Cuspide, reflectetur, neque mutata curvatura, portio $Mn$ convexitatem versus $N$ obvertere poterit, dum altera $Mm$ est concava versus $N$; cujusmodi curvaturæ immutatio vocari solet INFLEXIO, vel *punctum* FLEXUS CONTRARII: Quare, ubi radius osculi est finitus, ibi neque Cuspis, neque punctum flexus contrarii locum habere potest. TAB. XV. Fig. 55.

320. Cum igitur ex æquatione inter $t$ & $u$

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gttu + Htu^2 + \&c.,$$

inventus sit radius osculi $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$, manifestum est, si fuerit $A^2E - ABD + B^2C = 0$, tum radium osculi fieri infinite magnum, ideoque Circulum osculantem in Lineam rectam abire. Ubi ergo hoc evenit, ibi Linea curva curvatura destituitur, atque duo Curvæ elementa quasi in

 directum erunt sita. Quo igitur his casibus natura Curvæ penitius perspiciatur, substitutio $t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(AA+BB)}}$ & $u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(AA+BB)}}$, etiam in terminis $Ft^2 + Gtu + Huu + Iu^2$ est instituenda. Cum autem præ termino primo $r\sqrt{(A^2+B^2)}$ omnes termini sequentes, qui $r$ continent, evanescant, his terminis rejectis, atque substitutione per totam æquationem facta, obtinebitur ejusmodi æquatio

$$r\sqrt{(A^2+B^2)} = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

321. Ex hac æquatione jam statim colligitur, ut supra, radius osculi $= \frac{\sqrt{(AA+BB)}}{2\alpha}$; sin autem sit $\alpha = 0$, quo casu radius osculi fit infinitus, ad Curvæ naturam exactius cognoscendam, sumi debet terminus sequens $\beta s^3$, ita ut fit $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \beta s^3$ nisi enim sit $\beta = 0$, termini sequentes $\gamma s^4$, $\delta s^5$ &c., omnes præ hoc evanescunt. Curvam ergo hoc casu in $M$ osculabitur Curva hac æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \beta s^3$ expressa, ex qua simul figura Curvæ circa punctum
TAB. $M$ cognoscetur. Cum igitur Abscissæ $r$ negative sumtæ ne-
XVI. gativus valor Applicatæ $s$ respondeat, Curva circa $M$ figu-
Fig. 61. ram habebit anguineam $m M \mu$, ideoque in $M$ habebit punctum flexus contrarii.

322. Quod, si præter $\alpha$ etiam fiat $\beta = 0$, tum natura Curvæ circa $M$ exprimetur hac æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} =$
TAB. $\gamma s^4$, ex qua cum unicuique Abscissæ $r$ duplex Applicata $s$
XVI. respondeat, altera affirmativa, altera negativa, neque Abscissa
Fig. 62. $r$ utrinque sumi queat, utraque Curvæ portio $Mm$ & $M\mu$ ad eandem Tangentis partem erit posita. At si, ob $\alpha$, $\beta$, & $\gamma$ evanescentes, natura Curvæ circa $M$ exprimatur æquatione $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \delta s^5$, tum Curva ad $M$ iterum ha-
TAB. bebit punctum flexus contrarii uti in *Figura* 61. Sin autem
XVI. fuerit etiam $\delta = 0$, ut fiat $r\sqrt{(A^2+B^2)} = \epsilon s^6$, tum Curva

iterum puncto flexus contrarii destituetur, uti *Figura* 62. Atque generaliter, si exponens ipsius $s$ fuerit numerus impar, Curva in $M$ habebit punctum flexus contrarii; sin autem exponens ipsius $s$ fuerit numerus par, Curva carebit puncto flexus contrarii, uti *Figura* 62. CAP. XIV. TAB. XVI.

323. Hæc igitur sunt Curvarum phænomena, si punctum $M$ fuerit simplex, seu si in æquatione

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \&c.,$$

non uterque coëfficiens $A$ & $B$ simul evanescat. Quod si autem fuerit & $A = 0$, & $B = 0$, Curvaque habuerit duos pluresve ramos se in puncto $M$ intersecantes, uniuscujusque rami curvatura & indoles in $M$ investigabitur seorsim, ut ante. TAB. XV. Fig. 56. Sit enim pro Tangente cujusvis rami $mt + nu = 0$, & quæratur æquatio pro hoc ramo inter Coordinatas $r$ & $s$, quarum illa $r$ in normali $MN$ capiatur, ut sit $r$ infinities minor quam $s$. TAB. XV. Fig. 55. Poni ergo debebit $t = \frac{-mr+ns}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ & $u = \frac{-ms-nr}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$; que facto & neglectis terminis ob infinitam parvitatem præ reliquis evanescentibus, prodibit, si $M$ fuerit punctum duplex, hujusmodi æquatio $rs = \alpha s^3 + \beta s^4 + \gamma s^5 + \delta s^6 + \&c.$: sin autem $M$ fuerit punctum triplex, talis $rss = \alpha s^4 + \beta s^5 + \gamma s^6 + \&c.$, & ita porro: quæ æquationes omnes reducuntur ad hanc formam

$$r = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \&c.$$

324. Ex hac æquatione intelligitur istius Curvæ rami, quem consideramus, in $M$ esse radium osculi $= \frac{1}{2\alpha}$, qui, si $\alpha = 0$, fiet $= \infty$. Hoc ergo casu natura Curvæ exprimetur vel hac æquatione $r = \beta s^3$, vel $r = \gamma s^4$ vel $r = \delta s^5$, &c.; ex quibus, ut ante, colligetur Curvæ ramum in $M$ vel punctum flexus contrarii habere, vel tali carere. Prius scilicet evenit, si exponens ipsius $s$ fuerit numerus impar, posterius si sit numerus

LIB. II. par. Hoc ergo modo judicandum erit de quovis ramo per punctum $M$ transeunte seorsim, cum reperta fuerit ejus Tangens, ejusque Tengens discrepet a Tangentibus reliquorum ramorum sese in eodem puncto $M$ intersecantium.

325. Aliud autem judicium erit ferendum, si duorum pluriumve ramorum Tangentes in puncto $M$ coincidant. Sint enim, evanescentibus $A$ & $B$ in æquatione $0 = Ctt + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u +$ &c., primi membri $Ctt + Dtu + Euu$, ambo Factores simplices æquales, seu ambo rami se in puncto $M$ decussantes communem habeant Tangentem. Sit ergo $Ctt + Dtu + Euu = (mt + nu)^2$, atque æquatione ad Coordinatas $Mr = r$, & $rm = s$ translata, ponendo $t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$ & $u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$; hujusmodi prodibit æquatio $rr = \alpha rss + \beta s^3 + \gamma rs^3 + \delta s^4 + \epsilon rs^4 + \zeta s^5 +$ &c: termini enim, in quibus $r$ habet duas pluresve dimensiones præ primo $rr$ evanescunt.

TAB. XV. Fig. 55.

326. Hic primum spectandus est terminus $\beta s^3$, qui si adfuerit, præ eo reliqui omnes evanescunt, propterea quod $r$ infinities minus est quam $s$. Nisi ergo fuerit $\beta = 0$, natura Curvæ circa $M$ exprimetur hac æquatione $rr = \beta s^3$; ex qua, cum sit $r = s\sqrt{\beta s} = ss\sqrt{\frac{\beta}{s}}$, intelligitur radium osculi in $M$ esse $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\beta}}$; seu, ob $s$ evanescens in $M$, radium osculi quoque fieri $= 0$. Erit ergo curvatura in $M$ infinite magna seu Elementum Curvæ in $M$ erit portio Circuli infinite parvi. Quoniam porro Applicata $s$ eundem obtinet valorem, sive Abscissa $r$ sumatur affirmativa sive negativa, patet Curvam in $M$ habere Cuspidem, atque in duos ramos $Mm$, $M\mu$ divaricari se mutuo in $M$ contingentes atque Tangenti $Mt$ convexitatem obvertentes.

TAB. XVI. Fig. 63.

327. Sit $\beta = 0$; adsit autem terminus $\delta s^4$, præ quo $\gamma rs^3$ evanescit, atque natura Curvæ circa $M$ exprimetur æquatione $rr = \alpha rss + \delta s^4$; quæ, si fuerit $\alpha\alpha$ minor quam $-4\delta$, ob Factores

tores imaginarios, punctum conjugatum in $M$ indicat; sin autem $\alpha\alpha$ major quam $-4\delta$, tum in duas æquationes hujusmodi $r = fss$ & $r = gss$ dispescitur. Quare in $M$ duo Curvæ rami se mutuo contingent, quorum alterius in $M$ radius osculi est $= \frac{1}{2f}$, alterius $= \frac{1}{2g}$. Si ergo hi duo rami concavitatem in eandem plagam vertant, figura erit duorum Arcuum circularium se intus Tangentium; sin autem concavitates in plagas oppositas dirigantur, figura erit duorum Arcuum circularium se extus Tangentium. CAP. XIV. TAB. XVI. Fig. 64. Fig. 65.

328. Sin etiam $\delta$ evanescat, tum æquatio vel in duas æquationes erit resolubilis, vel secus, priori casu duo oriuntur rami se in puncto $M$ tangentes, quorum utriusque natura exprimetur hujusmodi æquatione $r = \alpha s^m$; prodibunt ergo tot diversæ figuræ, quot dantur combinationes binorum ramorum, qui in $M$ punctum simplex constituunt, quos vocemus *ramos primi ordinis*, qui omnes in æquatione $r = \alpha s^m$, continentur. Posteriori autem casu quo æquatio in duas alias se resolvi non patitur, natura Curvæ exprimetur æquatione vel $rr = \alpha s^{'}$, vel $rr = \alpha s^{'}$, vel $rr = \alpha s^{'}$, &c.; quos ramos cum eo, quem supra invenimus $rr = \alpha s^{'}$, *ramos secundi ordinis* appellabimus, quia vicem tenent duorum ramorum primi ordinis se in $M$ tangentium. Hi autem rami secundi ordinis omnes in $M$ habebunt Cuspidem, uti præbuit æquatio $rr = \alpha s^{'}$; hoc tamen discrimine, quod, cum radius osculi in $M$ pro æquatione $rr = \alpha s^{'}$ esset infinitè parvus, idem pro reliquis æquationibus prodeat infinite magnus. Cum enim ex æquatione $rr = \alpha s^{'}$ sit $r = ss\sqrt{\alpha s}$, erit radius osculi in $M = \frac{1}{2\sqrt{\alpha s}}$, hoc est, ob $s = 0$, infinitus. TAB. XVI. Fig. 63.

329. Si tres Tangentes ramorum se in $M$ decussantium in se invicem incidant; tum vel tres rami primi ordinis se in eodem puncto $M$ contingent, vel in $M$ erit contactus unius

LIB. II. rami secundi ordinis cum uno ramo primi ordinis, vel unicus per $M$ transibit *ramus tertii ordinis.* Ramorum autem tertii ordinis natura exprimetur hujusmodi æquationibus $r^3 = \alpha s^4$; $r^3 = \alpha s^5$; $r^3 = \alpha s^7$; $r^3 = \alpha s^8$; &c., seu hac generali $r^3 = \alpha s^n$, existente $n$ numero quocunque integro ternario majore neque per ternarium divisibili. Horum ramorum autem figura ita erit comparata, ut in $M$ sit punctum flexus contrarii, si $n$ fuerit numerus impar; flexus vero non contrarius seu
TAB. XVI. continuus (ut in *Figura* 62.) adsit, si $n$ fuerit numerus par. Ceterum in his Curvis radius osculi in $M$ erit infinite parvus si $n$ minor quam 6, at infinite magnus sit $n$ major quam 6.

330. Simili modo si quatuor Tangentes ramorum se in $M$ decussantium congruant, tum vel quatuor rami primi ordinis, vel duo primi & unus secundi, vel duo rami secundi ordinis, vel unus primi & unus tertii ordinis se in eodem puncto $M$ contingent, vel denique unicus *ramus quarti ordinis* per $M$ transibit. Ramorum autem quarti ordinis natura continetur hac æquatione generali $r^4 = \alpha s^n$, existente $n$ numero integro
TAB. XVI. Fig. 63. impari majore quam 4. Hæ autem æquationes omnes præbent Cuspidem, uti rami secundi ordinis. At in $M$ erit radius osculi infinite parvus si $n$ minor quam 8, infinite magnus autem si $n$ major quam 8.

331. Eodem modo ramorum *quinti* superiorumve ordinum natura evolvetur; ratione figuræ autem rami quinti, septimi, noni, omniumque imparium ordinum conveniunt cum ramis primi ordinis, quorum duplex est figura, vel cum puncto flexus contrarii, vel sine eo. Rami autem sexti, octavi, & omnium parium ordinum conveniunt ratione figuræ cum ramis secundi & quarti ordinis, omnes scilicet habebunt Cuspidem in $M$ uti *Figura* 63. exhibet. Quod autem ad radium osculi attinet, quoniam horum Arcuum natura exprimitur hac æquatione $r^m = \alpha s^n$, existente $n$ numero majore quam $m$; per-

ſpicuum eſt, ſi fuerit $n$ minor quam $2m$, radium oſculi fore infinite parvum; contra vero, ſi $n$ major quam $2m$, infinite magnum.

332. Phænomena ergo, quæ in omni Curva conſpectui ſe offerunt, ad tria genera reducuntur. Primo ſcilicet Curva *continua curvatura* progreditur, neque uſquam punctum flexus contrarii habet, neque Cuſpidem ſeu punctum reflexionis. Evenit hoc primum ſi radius oſculi ubique fuerit finitæ magnitudinis, tum vero etiam dantur caſus quibus radii oſculi magnitudo ſive infinite magna ſive infinite parva continuum tractum non perturbat, quod uſu venit ſi natura Curvæ circa punctum $M$ exprimitur æquatione $\alpha r^m = s^n$, exiſtente $m$ numero impari, at $n$ numero pari majori quam $m$. Secundum phænomenon eſt *punctum Flexus contrarii*, quod locum habere nequit niſi radius oſculi fuerit vel infinite magnus vel infinite parvus; indicatur autem æquatione $\alpha r^m = s^n$, ſi uterque exponens $m$ & $n$ fuerit numerus impar, exiſtente ſemper $n$ majore quam $m$. Erit enim radius oſculi infinite magnus ſi $n$ major quam $2m$, at infinite parvus ſi $n$ minor quam $2m$. Tertium phænomenon eſt *punctum Reflexionis* ſeu *Cuſpis*, ubi duo quaſi rami verſus ſe invicem convexi in puncto coeuntes ſe tangunt atque terminantur; tale punctum monſtrat æquatio $\alpha r^m = s^n$, ſi $m$ fuerit numerus par & $n$ impar. In Cuſpide ergo radius oſculi ſemper eſt vel infinite parvus vel infinite magnus.

333. Quoniam igitur in his tribus generibus omnes Curvarum, ratione tractus continui, varietates continentur, primum intelligitur Curvæ continuæ ramum nunquam ita inflexum dari, ut in $C$ angulum finitum $ACB$ conſtituat. Deinde, cum in puncto reflexionis ambo rami ſibi convexitatem obvertant, ejuſmodi punctum reflexionis $ACB$ in $C$ non datur, ubi rami $AC$ & $BC$ in $C$ quidem communem Tangentem habeant, at alterius concavitas alterius convexitatem reſpiciat; & quoties

TAB. XVI. *Fig.* 66.

TAB. XVI. *Fig.* 67.

LIB. II. hujusmodi reflexio adesse videatur, toties Curva non est completa; &, si Curva ad normam æquationis compleatur ac secundum omnes partes exprimatur, orietur figura, qualis in *Figura* 64 exhibetur. Dantur quidem Curvarum describendarum modi, quibus ejusmodi Cuspis $ACB$ orietur, quæ propterea ab HOSPITALIO *Cuspis secundæ speciei* vocatur. Verum notandum est descriptiones mechanicas non semper totam Curvam, quæ quidem æquatione contineatur, producere, sed sæpenumero certam tantum partem exhibere, qua sola notatione lis, quæ circa hanc Cuspidem secundæ speciei est mota, dirimitur.

TAB. XVI.

Non obstantibus his argumentis, quibus existentia hujusmodi Cuspidis secundæ speciei everti videtur, innumerabiles dantur Curvæ algebricæ tali Cuspide præditæ. Inter quas adeo una ex ordine Linearum quarto, hac æquatione contenta $y^4 - 2y^2x - 4yxx - x^3 = 0$, quæ ex ista formula $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ resultat. Quanquam enim hic primum occurrit terminus $\sqrt{x}$, tamen ejus signum non est ambiguum, sed necessario debet esse $+$. Nam, si ipsi tribueretur signum negationis, alter terminus $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{(x\sqrt{x})}$ evaderet imaginarius. Ex quo exemplo quemadmodum exempla supra allata restringi oporteat luculenter perspicitur.

TAB. XVI. *Fig.* 64.

334. Si duo rami, qui in $M$ communem habent Tangentem, ideoque quatuor Arcus ex $M$ exeuntes repræsentant nempe $Mm$, $M\mu$, $Mn$, $M\nu$, diversis æquationibus exprimantur, dubium est nullum, quinam horum Arcuum sint continui; ii scilicet, qui sub eadem æquatione continentur; eritque Arcus $Mm$ continuatio Arcus $Mn$, & $M\mu$, continuatio Arcus $\nu M$. Quod si vero ambo rami illi eadem æquatione exprimantur, tum ob cessantem rationem priorem, Arcus $Mm$ æque haberi potest pro continuatione Arcus $\nu M$, atque Arcus $nM$. Cum autem uterque Arcus $Mn$ & $M\nu$ æque haberi possit pro continuatione Arcus $Mm$, etiam alter pro alterius continuatione haberi poterit. Hinc Arcus $mM$,

& $M\mu$ Curvam continuam constituere censendi sunt, æque ac bini Arcus quicunque alii, sicque hoc casu in $M$ se respicient duæ Cuspides secundæ speciei, $mM\mu$ & $nN\nu$.

335. Neque vero solum valet de duobus ramis qui sine Flexu contrario ac sine Cuspide se mutuo in $M$ tangunt atque eadem æquatione exprimuntur, sed etiam eadem erit continuitatis ratio, cujuscunque generis fuerint ambo illi rami se mutuo in $M$ tangentes, dummodo communi æquatione exprimantur. Evenit hoc quoties inter $r$ & $s$ ad hujusmodi pervenitur æquationem $\alpha^2 r^{2m} - 2\alpha\mathfrak{C} r^m s^n + \mathfrak{C}\mathfrak{C} s^{2n} = 0$; tum enim uterque ramus eadem æquatione $\alpha r^m = \mathfrak{C} s^n$ exprimetur. Hoc igitur casu quatuor Arcuum ex puncto $M$ exeuntium duoquicunque pro una Linea continua haberi possunt, hincque nascentur innumerabiles Cuspides secundæ speciei. Hæc autem ipsa continuitatis ratio in causa est, quod quædam descriptiones ac constructiones mechanicæ nonnunquam Cuspides secundæ speciei producant; hoc tamen evenire non potest, nisi quando descriptio non totam Curvam in æquatione contentam, sed ejus tantum ramum unum vel aliquot exhibet.

---

## CAPUT XV.

### *De Curvis una pluribusve Diametris præditis.*

336. De Lineis secundi ordinis supra vidimus, eas omnes unam ad minimum habere Diametrum orthogonalem, quæ totam Curvam in duas partes similes & æquales secet. Parabola scilicet ejusmodi unam habet Diametrum; ac propterea duabus constat partibus æqualibus & similibus. Ellipsis autem atque Hyperbola duas ejusmodi habent Diametro se mutuo in Centro normaliter decussantes; ideoque in iis quatuor dantur Arcus seu rami inter se æquales & similes.

LIB. II. Circulus vero, quia ab omni recta per Centrum ducta in duas partes similes & æquales dividitur, innumeras habebit partes æquales, omnes scilicet Arcus, qui æqualibus chordis subtenduntur, simul inter se sunt æquales & similes.

337. Hanc igitur duarum pluriumve partium ejusdem Curvæ similitudinem hic data opera perpendemus; easque Curvas, quarum duæ pluresve partes inter se sunt similes, ad æquationes generales revocabimus. Ac primo quidem, si consideremus æquationem inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$, diviso universo spatio in quatuor regiones litteris Q, R, S, T indicatas per rectas $AB$, $EF$, se mutuo in $C$ normaliter secantes, sumtis $x$ & $y$ affirmativis, portio Curvæ in regione Q sita oritur; sumta autem Abscissa $x$ affirmativa, at Applicata $y$ negativa, portio Curvæ in regione R sita oritur: sin autem $x$ negativa ponatur, manente $y$ affirmativa, portio Curvæ in regione S sita prodibit; portio denique in regione T sita evenitur, posita utraque Coordinata $y$ & $x$ negativa.

TAB. XVII. Fig. 68.

338. Portiones ergo in regionibus Q & R sitæ inter se erunt æquales & similes, si æquatio ita fuerit comparata, ut non mutetur etiamsi $-y$ loco $y$ scribatur. Cum igitur omnis potestas parium exponentium ipsius $y$ hac gaudeat proprietate; patet, si in æquatione pro Curva nullæ potestates impares ipsius $y$ occurrant, Curvæ portiones in regionibus Q & R sitas inter se fore æquales & similes; ideoque rectam $AB$ in qua Abscissæ $CP = x$ capiuntur, fore Curvæ Diametrum. Hujusmodi ergo Curvæ, si quidem fuerint algebraïcæ, omnes in hac æquatione generali continebuntur

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta yy + \varepsilon x^3 + \zeta xyy + \eta x^4 + \theta x^2 y^2 + \iota y^4 \text{ \&c.}$$

quæ expressio ita describi potest ut sit Functio rationalis ipsarum $x$ & $yy$. Quod si ergo $Z$ fuerit Functio quæcunque rationalis ipsarum $x$ & $yy$, tum æquatio $Z = 0$, exprimet Lineam curvam, quæ a recta $AB$ in duas partes similes &

æquales bisecabitur; erunt ergo quoque portiones in regionibus S & T sitæ inter se æquales & similes. 

339. Portiones vero in regionibus Q & S erunt æquales & similes, si æquatio ita fuerit comparata, ut posito $-x$ loco $x$ non immutetur: quare, si Z fuerit Functio quæcunque rationalis ipsarum $xx$ & $y$, tum æquatio $Z = 0$, exprimet Curvam, quæ per rectam $EF$ in duas partes similes & æquales bisecabitur. Æquatio ergo pro his Curvis erit hujusmodi

$$0 = \alpha + \beta y + \gamma xx + \delta yy + \varepsilon xxy + \zeta y^3 + \eta x^4 + \theta xxyy + \iota y^4 + \&c.$$

Per hanc ergo æquationem portio Curvæ in S sita similis & æqualis erit portioni in Q, similique modo portio in T portioni in R.

340. Portiones autem in regionibus oppositis Q & T, seu R & S erunt similes & æquales, si æquatio inter Coordinatas $x$ & $y$ ita fuerit comparata, ut, posita utraque $x$ & $y$ negativa, nullam mutationem subeat. Sit $Z = 0$ æquatio pro his Curvis, ac primo patet, si Z fuerit Functio ipsarum $x$ & $y$, parium dimensionum, seu, si fuerit aggregatum ex quotcunque Functionibus homogeneis parium dimensionum, tum æquationem $Z = 0$ præscripta gaudere proprietate. Tum vero si Z fuerit aggregatum quotcunque Functionum homogenearum imparium dimensionum, sumtis $x$ & $y$ negativis, Z abibit in $-Z$; ideoque, cum esset $Z = 0$, erit quoque $-Z = 0$. Hinc ergo duplex nascitur æquatio generalis pro Curvis, quæ in regionibus oppositis Q & T itemque in R & S portiones habent æquales & similes, altera scilicet erit

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta y^2 + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta xxyy + \theta xy^3 + \iota y^4 + \kappa x^6 + \&c.$$

altera vero erit

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma x^3 + \delta x^2 y + \varepsilon xy^2 + \zeta y^3 + \eta x^5 + \theta x^4 y + \iota x^3 y^2 + \&c.$$

341. Curvæ ergo, quæ duas habent partes similes & æquales, duplicis sunt generis: vel enim hæ duæ partes utrinque circa Lineam rectam ita sunt dispositæ, ut omnes Ordinatæ

LIB. II. orthogonales ad illam rectam simul bifariam secentur, quo casu illa recta *Diameter* Curvæ *orthogonalis* appellatur, quorsum pertinent æquationes §. §. & 337. & 338. traditæ. Vel binæ illæ partes similes & æquales in regiones oppositas Q & R seu T & S cadunt, ita ut omnis recta per punctum $C$ ducta Curvam dividat in duas partes alternatim æquales, cujusmodi Curvæ continentur in æquationibus in paragrapho præcedente exhibitis. Hanc igitur partium æqualium diversam positionem ita describemus, ut eas, quæ ad priorem speciem pertinent, *diametraliter æquales*; quæ vero ad posteriorem, *alternatim æquales* appellemus. Quia vero in posteriore specie datur punctum $C$, per quod omnis recta utrinque ad Curvam producta simul bisecatur, hoc punctum *Centri* nomine appellari convenit, ita ut Curvæ binas partes alternatim æquales habentes Centro præditæ dicantur; illæ vero Curvæ, quæ duas partes diametraliter æquales habent, Dimetro præditæ vocentur.

342. Cum æquatio $Z = 0$, præbeat Curvas quarum Diameter est recta $AB$, si Coordinata $y$ pares tantum obtineat dimensiones in Functiones $Z$, atque eadem æquatio $Z = 0$, rectam $EF$ Curvæ diametrum indicet, si altera Coordinata $x$ ubique pares habeat exponentes, sequitur, si Z ejusmodi fuerit Functio ipsarum $x$ & $y$ ut omnes exponentes tam ipsius $x$ quam ipsius $y$ sint numeri pares, tum utramque rectam $AB$ & $EF$ fore Curvæ Diametrum orthogonalem; ideoque quatuor partes in regionibus Q, R, S & T sitas inter se fore æquales & similes. Hujusmodi ergo Curvæ omnes in hac generali æquatione continebuntur.

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma y^2 + \delta x^4 + \epsilon x^2 y^2 + \zeta y^4 + \eta x^6 + \theta x^4 y^2 + \&c.$$

343. Curvæ ergo in hac æquatione contentæ duas habebunt Diametros orthogonales $AB$ & $EF$ se mutuo in $C$ normaliter intersecantes. Pertinent ergo hæc Curvæ omnes ad Linearum ordines vel secundum, vel quartum, vel sextum, &c., ita ut in nullo Linearum ordine impari ulla contineatur Linea curva duabus Diametris se mutuo normaliter intersecantibus prædita.

prædita. Deinde, quia ista æquatio quoque continetur in æquatione priori, §. 339, hæ Curvæ simul Centrum habebunt in puncto $C$, ita ut omnis recta per id utrinque ad Curvam producta, in eo simul bifariam secetur. Hujusmodi igitur Curvas duplici diametro gaudentes præbebit æquatio $Z = o$, si quidem fuerit $Z$ Functio quæcunque rationalis ipsarum $xx$ & $yy$. CAP. XV.

344. Quia igitur hoc modo deducti sumus ad Lineas curvas duabus Diametris præditas, inquiramus in æquationes pro Lineis curvis, quæ plures habeant Diametros. Ac primo quidem facile ostendetur, si quæpiam Curva duas tantum habeat Diametros, eas inter se normales esse oportere, ita ut nulla Curva duabus Diametris tantum prædita detur, quæ non in æquatione modo inventa contineatur. Ponamus enim cujuspiam Lineæ curvæ duas esse Diametros $AB$, & $EF$ sese in $C$ non normaliter decussantes. Cum igitur $EC$ sit Diameter, Curva utrinque circa eam æqualiter erit comparata: quare, cum ejus pars citerior rectam $AC$ pro Diametro habeat, etiam pars ulterior Diametrum habebit $GC$, in eodem puncto $C$ cum $EC$ angulum $GCE = ACE$ constituentem. Simili modo, cum $GC$ sit Diameter, debebit quoque recta $IC$, existente $GCI = GCE$, esse Diameter ejusdem indolis, cujus est $EC$. Porro Diameter quoque erit recta $LC$, sumto angulo $ICL = ICG$; sicque progrediendo, continuo novæ Diametri reperientur donec in primam $AC$ recidant; quod evenit, si angulus $ACE$ ad angulum rectum habeat rationem rationalem. TAB. XVII. *Fig.* 69.

345. Nisi ergo angulus $ACE$ ad angulum rectum habeat rationem rationalem, numerus Diametrorum erit infinitus, quo casu Curva erit Circulus; quippe in quo omnis recta per Centrum ducta est Diameter orthogonalis: hic enim Diametri nomen ad solas Diametros orthogonales restringimus, quia his solis Curvæ in duas partes similes & æquales dividuntur. Ex his intelligitur nullam Curvam algebraïcam duas habere posse Diametros inter se parallelas: ob rationes enim allegatas, si duas haberent Diametros parallelas, simul infinitas inter

LIB. II. se parallelas & æqualiter distantes habere deberent; ideoque Linea recta hujusmodi Curvam in infinitis punctis secare posset; quæ proprietas in Lineas curvas algebraicas non cadit.

346. Quod si ergo quæpiam Linea curva plures habeat Diametros, eæ omnes se mutuo in eodem puncto $C$ intersecabunt, atque a se invicem sub æqualibus angulis distabunt. Erunt vero hæ Diametri duplicis generis alternatim progredientes; Diameter enim $CG$ ejusdem erit indolis, cujus est Diameter $CA$; atque æquatio pro Curva, sumta Diametro $CG$ pro Axe: conveniet cum æquatione pro Curva, sumta Diametro $CA$ pro Axe: Diametri ergo alternæ $CA$, $CG$, $GL$ &c. æqualiter ad Curvam erunt affectæ, similique modo Diametri $CE$, $CI$ &c. eadem ratione ad Curvam pertinebunt. Quam ob rem, si numerus Diametrorum fuerit finitus, tum angulus $ACG$ erit pars aliquota quatuor rectorum, seu angulus $ACE$ erit pars aliquota anguli 180 graduum, seu semiperipheriæ, quam vocemus $= \pi$.

TAB. XVII. Fig. 70. 347. Si fuerit angulus $ACE = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, casus existit jam supra tractatus, quo Curva duas habet Diametros inter se normales. Hujusmodi ergo Curvas denuo investigemus, at methodo diversa a priori, quæ æque ad inventionem plurium Diametrorum accommodari queat. Sit igitur Curva duabus Diametris $AB$, & $EF$ prædita; sumatur in ea quodcunque punctum $M$, &, ducta ex Centro $C$ recta $CM$, ponatur $CM = z$, & angulus $ACM = s$; quæraturque æquatio inter $z$ & $s$. Ac primo quidem intelligitur, quia recta $AC$ est Diameter, $z$ esse debere ejusmodi Functionem ipsius $s$, quæ maneat eadem, etiamsi $-s$ loco $s$ ponatur; sumto enim angulo $ACM = s$ negativo $ACm$, recta $Cm$ debet esse $= CM$. Verum $cos.\,s$ est ejusmodi Functio ipsius $s$, quæ manet eadem posito $-s$ loco $+s$, quam ob rem huic requisito satisfiet si fuerit $z$ Functio quæcunque rationalis ipsius $cos.\,s$.

348. Ponatur Abscissa $CP = x$, Applicata $PM = y$,

erit $z = \sqrt{(xx+yy)}$ & $cof.\, s = \frac{x}{z}$; sitque $Z = 0$, æquatio pro Curva, cujus recta $CA$ sit Diameter; atque esse debebit Z Functio rationalis ipsarum $z$ & $\frac{x}{z}$, vel ipsarum $z$ & $x$, vel, ob rationalitatem, ipsarum $xx+yy$ & $x$. At si Z fuerit Functio ipsarum $xx+yy$ & $x$, erit quoque Functio ipsarum $yy$ & $x$. Sit enim $xx+yy = u$; quia Z debet esse Functio ipsarum $x$ & $u$, posito $u = t + xx$, ut sit $t = yy$, fiet Z Functio ipsarum $t$ & $x$, hoc est ipsarum $yy$ & $x$. Quoties ergo Z fuerit Functio rationalis ipsarum $yy$ & $x$, toties recta $CA$ Curvæ erit Diameter: quæ est eadem proprietas Curvarum una Diametro gaudentium, quam supra invenimus.

349. At Curvam quæsitam duabus Diametris $AB$ & $EF$ præditam esse oportet; unde $CB$ erit Diameter ejusdem indolis, ac $CA$. Quare, si recta $CM = z$, ad Diametrum $CB$ referatur, ob angulum $BCM = \pi - s$, necesse est ut $z$ ejusmodi sit Functio ipsius $s$, quæ non varietur, etiamsi loco $s$ ponatur $\pi - s$. Hujusmodi Functio quidem foret $fin.\, s$, est $fin.\, s = fin.\,(\pi - s)$: sed hoc modo præcedenti conditioni non satisfit. Hinc ejusmodi expressio inveniri debet, quæ ad angulos $s$, $-s$, & $\pi - s$ æqualiter pertineat; talis est $cof.\, 2s$, est enim $cof.\, 2s = cof. - 2s = cof.\, 2(\varpi - s)$. Quocirca æquatio $Z = 0$, erit pro Curva duabus Diametris $AB$ & $EF$ prædita, si Z fuerit Functio rationalis ipsarum $z$ & $cof.\, 2s$. Est vero $cof.\, 2s = \frac{xx - yy}{zz}$. Ex quo Z debebit esse Functio ipsarum $xx+yy$, & $xx - yy$, vel ipsarum $xx$ & $yy$, uti supra invenimus.

350. Progrediamur ad Curvas tribus Diametris $AB$, $EF$ & $GH$ præditas investigandas; quæ Diametri in eodem puncto $C$ ad angulos $ACE$, $ECG$, $GCB = 60^\circ = \frac{1}{3}\varpi$ se mutuo secabunt, atque Diametri alternæ $CA$, $CG$, $CF$ ejusdem erunt indolis. Quare, si ponatur $CM = z$, & angulus TAB. XVII. Fig. 71.

LIB. II. $ACM = s$, ob $GCM = \frac{2}{3}\pi - s$, æquatio pro Curva $Z = 0$, ita debebit esse comparata, ut $Z$ sit Functio rationalis ipsius $z$, & quantitatis cujuspiam $w$, quæ ab $s$ ita pendeat, ut maneat eadem, sive loco $s$ ponatur $-s$, sive $\frac{2}{3}\pi - s$. Erit ergo $w = cos. 3s$; est enim $cos. 3s = cos. 3s = cos. (2\pi - 3s)$. At, positis Coordinatis $CP = x$, $PM = y$, erit $cos. 3s = \frac{x^3 - 3xyy}{z^3}$, ideoque $Z$ esse debet Functio rationalis ipsarum $xx + yy$ & $x^3 - 3xyy$.

351. Quod si ergo ponatur $xx + yy = t$ & $x^3 - 3xyy = u$, hæc erit æquatio generalis pro Curvis tribus Diametris præditis

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \&c.,$$

quæ præbet hanc inter $x$ & $y$

$$0 = \alpha + \beta(xx + yy) + \gamma x(xx - 3yy) + \delta(xx + yy)^2 + \&c.$$

Cum igitur æquatio $0 = \alpha + \beta xx + \beta yy$ sit pro Circulo, qui, habens infinitas Diametros, etiam quæstioni de tribus Diametris satisfacit; simplicissima Curva tres habens Diametros erit Linea tertii ordinis hac æquatione expressa $x^3 - 3xyy = axx + ayy + b^3$, quæ tres habet Asymtotas triangulum æquilaterum comprehendentes, in cujus medio existit punctum $C$; & singulæ Asymtotæ sunt speciei $u = \frac{A}{tt}$. Pertinent ergo hæ Curvæ ad Speciem quintam secundum enumerationem a nobis supra factam.

TAB. XVIII. Fig. 72. 352. Si Curva habeat quatuor Diametros $AB$, $EF$, $GH$ & $IK$ se mutuo in puncto $C$ ad angulos semirectos $= \frac{1}{4}\pi$ interfecantes, tum Diametri $CA$, $CG$, $CB$, & $CH$ ejusdem erunt naturæ. Quare, posita $CM = z$, & angulo $ACM = s$, quæri debet Functio quædam ipsius $s$, quæ non

mutetur sive loco $s$ ponatur $-s$ sive $\frac{2}{4}\pi - s$. Talis autem Functio est $cos. 4s$. Quare, si Z fuerit Functio ipsarum $z$ & $cos. 4s$; seu quod eodem redit, ipsarum $xx + yy$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$, tum æquatio $Z = 0$, dabit Curvam quatuor Diametris præditam. Erit ergo Z Functio ipsarum $t$ & $u$; positis $t = xx + yy$ & $u = x^4 - 6xxyy + y^4$; Ponatur autem $v = tt - u$, eritque Z Functio ipsarum $t$ & $v$, hoc est ipsarum $xx + yy$ & $xxyy$. Vel etiam Z ita definiri potest ut sit Functio harum duarum quantitatum $xx + yy$ & $x^4 + y^4$.

353. Ut Curva æquatione $Z = 0$, expressa habeat quinque Diametros, oportet ut Z sit Functio ipsarum $z$ & $cos. 5s$. Quare, sumtis Coordinatis orthogonalibus $x$ & $y$, ob $cos. 5s = \frac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{z^5}$, debebit esse Z Functio rationalis harum expressionum $xx + yy$ & $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4$. Curva igitur simplicissima, quæ, præter Circulum, quinque habeat Diametros, est Linea quinti ordinis, atque hac æquatione exprimetur $x^5 - 10x^3yy + 5xy^4 = a(xx+yy)^2 + b(xx+yy) + c$. Hæc ergo Curva, propter omnes Factores supremi membri reales, habebit quinque Asymtotas suis intersectionibus pentagonum regulare, in cujus medio sit Centrum C, formantes.

354. Ex his jam generaliter patet, Curvam æquatione $Z = 0$, expressam, habituram esse $n$ Diametros, quarum binæ proxime angulum $= \frac{\pi}{n}$ comprehendant, si fuerit Z Functio ipsarum $z$ & $cos. ns$, seu inter Coordinatas orthogonales, Functio quæcunque rationalis harum expressionum $xx + yy$ & $x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} y^4 -$ &c. Seu æquatio hæc

$$0 = \alpha + \beta t + \gamma u + \delta tt + \epsilon tu + \zeta uu + \eta t^3 + \theta ttu + \&c.$$

præbebit Curvam $n$ Diametris præditam, si ponatur $t = xx + yy$

LIB. II. $\&u = x^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4} y^4 - \&c.$

Hinc ergo Curvæ inveniri possunt, quæ tot, quot lubuerit, habeant Diametros se mutuo in angulis æqualibus in eodem puncto $C$ intersecantes. Simul vero hæ æquationes in se complectuntur omnes omnino Curvas algebraïcas, quæ dato Diametrorum numero sint præditæ.

TAB. XVII. *Fig.* 70. TAB. XVII. *Fig.* 71. TAB. XVIII. *Fig.* 72.

355. Hujusmodi Curvæ pluribus Diametris præditæ duplo plures habent partes inter se similes & æquales. Sic Curva duabus Diametris prædita quatuor habet partes similes & æquales, $AE$, $BE$, $AF$, & $BF$. Curva autem tribus Diametris prædita habet sex partes similes & æquales $AE$, $GE$, $GB$, $FB$, $FH$ & $AH$. Atque Curva quatuor Diametris prædita octo habet partes similes & æquales $AE$, $AK$, $GE$, $GI$, $BI$, $BF$, $HF$, & $HK$; similique modo numerus partium æqualium semper duplo major est quam numerus Diametrorum. Quemadmodum autem supra vidimus dari Curvas, duas partes similes habentes, quæ tamen Diametro careant, ita dabuntur quoque Curvæ plures partes similes & æquales habentes quæ tamen Diametris destituantur.

TAB. XVIII. *Fig.* 73.

356. Incipiamus a duabus partibus æqualibus sibi e regione oppositis $AME$, $BKF$, quem quidem casum supra jam tractavimus. Quod si enim Curva duas tantum habere debent partes æquales, necessario sibi oppositæ esse debent, quod clarius patebit, quando plures partes æquales contemplabimur. Ponamus ergo, ut ante, $CM = z$, & angulum $ACM = s$, ac manifestum est angulis $s$ & $\pi + s$ eundem valorem ipsius $z$ convenire opportere; sumto enim angulo $ACM = \pi + s$, fiet $z = CK$: at esse debet $CK = CM$; quærenda ergo est expressio communis angulis $s$ & $\pi + s$, cujusmodi est *tang.* $s$; est enim *tang.* $s =$ *tang.* $(\pi + s)$. Æquatio igitur $Z = 0$, erit pro tali Curva, qualem quærimus, si fuerit $Z$ Functio ipsarum $z$ & *tang.* $s$, seu Functio ipsarum $xx + yy$ & $\frac{x}{y}$. Ponamus $\frac{x}{y} = t$, eritque $xx + yy = yy(1 + tt)$.

Quare Z debebit esse Functio ipsarum $t$ & $yy\ (1+tt)$, hoc est ipsarum $t$ & $yy$: unde eædem æquationes resultant, quas supra invenimus. CAP. XV.

357. Quo autem fractiones, quibus tangentes laborant, evitemus, idem negotium per sinus & cosinus expedire poterimus. Cum enim sit & $\text{fin.}\,2s = \text{fin.}\,2(\pi+s)$ & $\text{cof.}\,2s = \text{cof.}\,2(\pi+s)$, quæsitum obtinebitur si Z capiatur Functio quæcunque rationalis trium harum formularum $z$, $\text{fin.}\,2s$ & $\text{cof.}\,2s$, seu ipsarum $xx+yy$, $2xy$, & $xx-yy$. Ubi notandum est, si expressionum $\text{fin.}\,2s$ & $\text{cof.}\,2s$ altera omittatur, Curvam insuper Diametrum esse habituram. Solutio ergo huc redibit ut Z capiatur Functio ipsarum $xx$, $yy$ & $xy$, rationalis; unde hujusmodi orietur æquatio

$$0 = \alpha + \beta xx + \gamma xy + \delta yy + \epsilon x^4 + \zeta x^3 y + \eta x^2 y^2 + \theta xy^3 + \iota y^4 + \&c.$$

Atque, si termini, in quibus non inest $x$, evanescant, tota æquatio dividi poterit per $x$ & prodibit

$$0 = \beta x + \gamma y + \epsilon x^3 + \zeta xxy + \eta xy^2 + \theta y^3 + \varkappa y^3 + \&c.$$

quæ sunt ambæ illæ æquationes quas supra invenimus.

358. Quæratur nunc Curva, quæ tres tantum habeat partes similes & æquales $AM$, $BN$, & $DL$. Hæc ergo ita erit comparata, ut eductis ex puncto medio $C$ tribus rectis $CM$, $CN$, & $CL$ in angulis æqualibus, eæ semper inter se futuræ sint æquales. Positis ergo angulo $ACM = s$, & recta $CM = z$; recta $z$ per $s$ ita definietur, ut his tribus angulis $s$, $\frac{2}{3}\pi + s$, & $\frac{4}{3}\pi + s$ idem valor ipsius $z$ conveniat; est enim $MCN = NCL = \frac{2}{3}\pi$. Horum autem trium angulorum communes sunt hæ expressiones $\text{fin.}\,3s$ & $\text{cof.}\,3s$. Quare, si Z fuerit Functio rationalis harum trium quantitatum $xx+yy$; $3xxy - y^3$; & $x^3 - 3xyy$, æquatio $Z = 0$, dabit Curvas quæsitas omnes. Hujusmodi ergo orietur æquatio generalis TAB. XVIII. *Fig.* 74.

$$0 = \alpha + \beta(xx+yy) + \gamma(3xxy - y^3) + \delta(x^3 - 3xyy) + \varepsilon(xx+yy)^2 + \zeta(xx+yy)(3xxy - y^3) + \eta(xx+yy)(x^3 - 3xyy) + \&c.$$

Lineæ igitur tertii ordinis hac proprietate præditæ continentur in hac æquatione

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy + \delta x^3 + 3\gamma xxy - 3\delta xyy - \gamma y^3.$$

TAB. XVIII. Fig. 73.

359. Si Curva quatuor habere debeat partes æquales $AM$, $EN$, $BK$ & $FL$, ita ut ex puncto medio $C$ eductis quatuor rectis quibus vis $CM$, $CN$, $CK$ & $CL$, sub angulis æqualibus, eæ futuræ sint æquales; ponatur angulus $ACM = s$ & recta $CM = z$; atque, ob angulos $MCN = NCK = KCL = 90° = \frac{1}{2}\pi$, recta $z$ per angulum $s$ ita debet exprimi, ut his angulis $s$, $\frac{1}{2}\pi + s$, $\pi + s$; $\frac{3}{2}\pi + s$ idem respondeat valor. Hanc vero proprietatem habent expressiones *sin.* $4s$ & *cos.* $4s$: quare æquatio $Z = 0$, dabit Curvam quatuor ejusmodi partibus æqualibus præditam, si fuerit $Z$ Functio quæcunque rationalis harum trium quantitatum $xx + yy$; $4x^3y - 4xy^3$ & $x^4 - 6xxyy + y^4$. Hinc æquatio generalis pro istiusmodi Curvis erit

$$0 = \alpha + \beta xx + \beta yy + \gamma x^4 + \delta x^3y + \varepsilon xxyy - \delta xy^3 + \gamma y^4 + \&c.$$

360. Simili modo apparet, si quæri debeat Curva Diametris destituta, quæ tamen quinque habeat partes æquales & similes, in æquatione $Z = 0$, esse debere $Z$ Functionem rationalem harum trium quantitatum

$$xx + yy;\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5\ \&\ x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4;$$

atque, si numerus partium æqualium esse debeat $= n$, tum $Z$ esse debet Functio rationalis harum trium $xx + yy$,

$$n x^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3} y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3\ 4.\ 5} x^{n-5} y^5 = \&c.,$$ CAP. XV.

&

$$x^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} x^{n-4} y^4 - \&c..$$

Quod si alterutra posteriorum expressionum non ingrediatur in æquationem, Curva habebit tot Diametros, quot numerus $n$ continet unitates.

361. In duplici hac enumeratione Curvarum aliquot partes æquales habentium, quæ vel Diametris sint præditæ vel iis careant, continentur omnino omnes Curvæ algebraïcæ, quæ quidem duas pluresve habeant partes similes & æquales. Quod ut ostendatur, habeat Curva continua duas partes $OAa$, $OBb$ inter se similes & æquales. Jungatur $AB$, superque ea tanquam basi constituatur triangulum isosceles $ACB$, cujus angulus $C$ æqualis sit angulo $O$. Jam, quia anguli $OAC$ & $OBC$ sunt æquales, erunt quoque Curvæ partes $CAa$ & $CBb$ similes & æquales: atque, ob legem continuitatis, si capiantur anguli $BCD$, $DCE$, &c., æquales singuli angulo $ACB$, & $CD = CE = CA = CB$, habebit Curva præterea ad has singulas rectas partes $Dd$, $Ee$, &c., similes & æquales partibus $Aa$, $Bb$. Nisi ergo ratio anguli $ACB$ ad $360^\circ$ fuerit irrationalis, partium æqualium numerus erit finitus, contra autem infinitus, neque adeo in Lineas algebraïcas cadens. Semper ergo Curva ista continetur in iis, quas ante investigavimus, Diametris carentes. TAB. XVIII. Fig. 75.

362. Sin autem duæ partes similes & æquales in plagas oppositas rectarum $AO$ & $BO$ cadant, ita ut sit pars $AOa$ similis & æqualis parti $OBb$; tum utrinque ducantur rectæ $AR$, & $BS$, ut sit $OAR = OBS, = \frac{1}{2} AOB$; eruntque rectæ $AR$ & $BS$ inter se parallelæ. Jungatur $AB$, & per punctum medium $C$ agatur ipsis $AR$ & $BS$ parallela $CV$, erunt partes $aA$, $bB$ respectu rectæ $CV$ similes & æquales. Nisi igitur sit $ba = \infty$, quia Arcui $bB$, a $b$ ad $a$ progrediendo, respondet ex altera parte Arcus similis & æqualis $aA$; ita TAB. XIX. Fig. 76.

 quoque huic ab $a$ ad $e$ per spatium $ae = ba$ progrediendo; respondebit ex altera parte Arcus similis & æqualis $eE$, huicque porro Arcus $dD$, ita ut hæc Curva habitura sit infinitas partes similes & æquales utrinque circa rectam $CV$ dispositas. Hujusmodi ergo Curva algebraica esse nequit.

363. Hoc ita se habet, si recta $AB$ fuerit obliqua ad parallelas $AR$ & $BS$, vel (quod eodem redit,) si in triangulo $AOB$ latera $AO$ & $BO$ fuerint inæqualia. Sin autem fuerit $AO = BO$, tum simul recta $AB$ erit perpendicularis ad parallelas $AR$ & $BS$, & ad $CV$, quæ simul per $O$ transibit. Hoc ergo casu puncta $b$ & $a$ congruent. Et, quia portiones $aA$ & $bB$ non solum erunt æquales & similes, sed etiam utrinque circa rectam $CV$ æqualiter dispositæ, hæc recta $CV$ erit Curvæ Diameter; qui casus ad priores Curvas expositas Diametro gaudentes pertinent. Quocirca ad casus in hoc Capite expositos referuntur omnes omnino Curvæ algebraïcæ, quæ duas pluresve partes habent similes & æquales.

---

## CAPUT XVI.

### *De inventione Curvarum ex datis Applicatarum proprietatibus.*

364. SINT $P$ & $Q$ Functiones quæcunque rationales Abscissæ $x$, atque natura Curvæ exprimatur hac æquatione $yy - Py + Q = 0$. Hinc ergo unicuique Abscissæ $x$ vel nulla vel duplex respondebit Applicata; erit autem harum duarum Applicatarum summa $= P$ & productum $= Q$. Si igitur $P$ fuerit quantitas constans, summa binarum Applicatarum singulis Abscissis respondentium erit constans, atque Curva habebit Diametrum; hoc idem autem evenit si fuerit $P = a + nx$; tum enim Linea recta hac æquatione $z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}nx$ contenta erit Diameter, in latiore significa-

tione hoc nomine accepto, ita ut obliquitas non excludatur. Sin autem fuerit $Q$ quantitas constans, tum rectangulum binarum Applicatarum erit ubique constans; Axis ergo a Curva nusquam secari poterit. At si sit $Q = \alpha + \beta x + \gamma xx$, hæcque expressio duos habeat Factores reales, Axis a Curva in duobus punctis trajicietur, atque $Q$ erit multiplum rectanguli ex partibus Axis, ideoque rectangulum Applicatarum se habebit ad rectangulum partium Axis in constanti ratione. CAP. XVI.

365. Hæ igitur proprietates, quas supra Sectionibus conicis convenire observavimus, in innumerabiles alias Lineas curvas competunt. Sic, constans magnitudo rectangulorum ex binis Applicatis eidem Abscissæ respondentibus formatorum, qua Hyperbolam ad Asymtotam relatam gaudere vidimus, communis ipsi est cum omnibus Curvis hac æquatione $yy - Py \pm aa = 0$, contentis. Deinde, sumta recta $EF$ Curvam in duobus punctis $E$ & $F$ secante pro Axe, cum in Sectionibus conicis rectangulum $PM.PN$ ad rectangulum $PE.PF$ constantem habeat rationem, hæc proprietas Sectionibus conicis communis erit cum omnibus Curvis in hac æquatione $yy - Py + ax - nxx = 0$, contentis. Erit autem $PM.PN = PE.PF$ seu $pm.pn - Ep.pF$, si fuerit $yy - Py = ax - xx$. Hæc igitur proprietas, qua Circulum præditum esse ex Elementis constat, non solum ipsi communis est cum infinitis Curvis altiorum ordinum, sed etiam in reliquas Sectiones conicas cadit. Sit enim $P = b + nx$, atque æquatio $yy - nxy + xx = ax + by$, quæ est pro Circulo si $n = 0$, & angulus $EPM$ rectus, complectetur quoque Ellipsin si $nn$ minor quam 4, & Hyperbolam si $nn$ major quam 4, atque Parabolam si $nn = 4$. TAB. V. *Fig.* 19.

366. Hinc concludimus in omni Sectione conica $AEBF$ cujus Axes, seu Diametri principales, sint $AB$, $EF$, si binæ ducantur rectæ quæcunque $pq$ & $mn$, quæ ad Axes principales sub angulo semirecto inclinentur, eas in $h$ se mutuo ita esse secturas, ut sit $mh.nh = ph.qh$. Quod quidem manifestum est ex proprietatibus palmariis: si enim per Centrum TAB. XIX. *Fig.* 77.

LIB. II. $C$ ducantur rectæ $PQ$ & $MN$ sub angulis semirectis ad Axes principales, erunt inter se æquales, ideoque $MC \cdot NC = PC \cdot QC$; quare, cum omnes rectæ his parallelæ eadem lege se secent, erit quoque $mh \cdot nh = ph \cdot qh$. Quin etiam hinc intelligitur, si modo rectæ $MN$ & $PQ$ ita ducantur, ut ad eundem Axem principalem æqualiter inclinentur, seu ut sit $PCA = NCA$, ob $CP = CN$, omnes rectas his parallelas se mutuo ita secare, ut rectangula partium sint æqualia, scilicet ut sit $mh \cdot hn = ph \cdot hq$.

TAB. XIX. Fig. 78. 367. His præmissis, contemplemur alias quæstiones circa binas Applicatas cuique Abscissæ respondentes ex æquatione $yy - Py + Q = 0$. Sit $AP$ Abscissa $= x$, cui respondeant duæ Applicatæ $PM$, $PN$: ac primo quærantur omnes Curvæ hujus indolis ut sit $PM^2 + PN^2$ quantitas constans $= aa$. Cum sit $PM + PN = P$ & $PM \cdot PN = Q$, erit $PM^2 + PN^2 = PP - 2Q$, & quæsito satisfiet si fuerit $PP - 2Q = aa$ seu $Q = \frac{PP - aa}{2}$; unde, pro Curvis desideratis obtinebitur ista æquatio $yy - Py + \frac{PP - aa}{2} = 0$. Quod si ponatur $P = 2nx$, prodibit Sectio conica proprietate proposita gaudens, $yy - 2nxy + 2nnxx - \frac{1}{2}aa = 0$, quæ æquatio est pro Ellipsi, Abscissis a Centro computatis.

TAB. XIX. Fig. 79. 368. Hinc sequitur non inelegans Ellipsium proprietas ista. Si circa Ellipseos duas quasvis Diametros conjugatas $AB$ & $EF$ describatur parallelogrammum $GHIK$ cujus latera Ellipsin tangent in punctis $A$, $B$, $E$, $F$, hujus parallelogrammi diagonales $GK$ & $HI$ omnes chordas $MN$ alterutri Diametro $EF$ parallelas ita secabunt in $P$ & $p$, ut sit quadratorum summa $PM^2 + PN^2$ vel $pM^2 + pN^2$ perpetuo constans nempe æqualis $2CE^2$. Similique modo ducta chorda $RS$ Diametro alteri $AB$ parallela erit $PR^2 + PS^2 = \varpi R^2 + \varpi S^2 = 2CA^2$. Positis enim $CA = CB = a$, $CE = CF = b$, $CQ = t$, $QM = u$, erit $aauu + bbtt = aabb$. Jam est $a : b = CQ\,(t)$:

$PQ$, & $CP$ ad $CQ$ ratione data, puta $m:1$. Quare, posita $CP = x$, $PM = y$, erit $x = mt$ & $y = u + \frac{bt}{a}$, seu $t = \frac{x}{m}$, & $u = y - \frac{bx}{ma}$, quibus valoribus substitutis orietur ista æquatio $aayy - \frac{2abxy}{m} + \frac{2bbxx}{mm} = aabb$. Sit $\frac{b}{ma} = n$, erit $yy - 2nxy + 2nnxx = bb$, quæ est æquatio ante inventa indicans esse $PM^2 + PN^2$ magnitudinem constantem.

CAP. XVI.

TAB. XIX. Fig. 78.

369. Quærantur nunc Curvæ in quibus sit summa cuborum $PM^3 + PN^3$ perpetuo quantitas constans. Cum sit $PM + PN = P$, erit $PM^3 + PN^3 = P^3 - 3PQ$: quare, si ponatur $PM^3 + PN^3 = a^3$, erit $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$: ideoque pro his Curvis erit æquatio generalis $yy - Py + \frac{1}{3}P^2 - \frac{a^3}{3P} = 0$, ubi pro $P$ Functionem quamcunque rationalem ipsius $x$ substituere licet. Simplicissima ergo Curva hanc habens proprietatem erit Linea tertii ordinis, quæ, ponendo $P = 3nx$, & $a = 3nb$, hac æquatione exprimetur

$$xyy - 3nxxy + 3nnx^3 - 3nnb^3 = 0,$$

quæ pertinet ad Speciem secundam secundum enumerationem supra factam.

370. Simili modo, si effici debeat ut sit $PM^4 + PN^4$ constans, quia est $PM^4 + PN^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ$, quantitas $Q$ per $P$ ita determinari debet ut sit $P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$ seu $Q = PP + \sqrt{(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)}$. Quia vero tam $P$ quam $Q$ debent esse Functiones rationales seu uniformes ipsius $x$, ne $y$ plures quam duos valores pro quavis Abscissa $x$ induere possit, quantitas $\sqrt{(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)}$ deberet esse rationalis; quod cum fieri nequeat, Functio $Q$ semper erit biformis, ideoque Applicatam $y$ reddet Functionem qua-

LIB. II. driformem. Verum ex æquatione $yy - Py + Q = 0$, elicitur $y = \frac{1}{2} P \pm \surd(-\frac{3}{4} PP \pm \surd(\frac{1}{2} P^4 + \frac{1}{2} a^4))$, unde patet Applicatam $y$ realem esse non posse nisi $\surd(\frac{1}{2} P^4 + \frac{1}{2} a^4)$ affirmative sumatur; quare, non obstante Functionis $Q$ biformitate, Applicata $y$ nunquam plures duobus valores habebit, quorum biquadratorum summa erit constans, sicut natura quæstionis requirit.

371. Quod si porro ejusmodi requiratur Curva, ut binorum ipsius $y$ valorum cuique Abscissæ $x$ respondentium potestates quintæ summam constantem constituant, seu ut sit $PM^5 + PN^5 = a^5$, debebit esse $P^5 - 5P^3Q + 5PQ^2 = a^5$. Cum igitur ex æquatione pro Curva $yy - Py + Q = 0$, sit $Q = -yy + Py$; erit $P^5 - 5P^4y + 10P^3yy - 10P^2y^3 + 5Py^4 = a^5$, seu $(P - y)^5 + y^5 = a^5$. Eodem modo reperietur, si debeat esse $PM^6 + PN^6 = a^6$ hæc æquatio $(P - y)^6 + y^6 = a^6$. Atque generaliter si quæratur Curva in qua sit $PM^n + PN^n = a^n$, obtinebitur ista æquatio $(P - y)^n + y^n = a^n$: ubi pro $P$ Functio quæcunque uniformis ipsius $x$ pro lubitu accipi potest. Ratio autem hujus æquationis in promptu est: cum enim summa ambarum Applicatarum sit $= P$, si altera sit $y$, altera erit $= P - y$, unde statim fit $(P - y)^n + y^n = a^n$.

372. Quod si autem loco $Q$ eliminetur $P$, ponendo in æquationibus, quibus relatio inter $P$ & $Q$ continetur, $P = \frac{yy + Q}{y}$, orietur pro $PM^n + PN^n = a^n$ hæc æquatio $y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$. Cum enim Applicatarum productum sit $= Q$, si una ponatur $= y$, erit altera $= \frac{Q}{y}$: unde æquatio in-

venta ſtatim fluit. Pro Curvis ergo, in quibus ſit $PM^n + PN^n = a^n$, duas nacti ſumus æquationes generales, alteram $(P-y)^n + y^n = a^n$, alteram $y^n + \frac{Q^n}{y^n} = a^n$: ex quarum poſteriori emergit $y^{2n} = a^n y^n - Q^n$, & $y^n = \frac{1}{2} a^n \pm \surd(\frac{1}{4} a^{2n} - Q^n)$, ita ut ſit $y = \sqrt[n]{(\frac{1}{2} a^n \pm \surd(\frac{1}{4} a^{2n} - Q^n))}$, quæ eſt Functio tantum biformis, atque pro quavis Abſciſſa plures duabus Applicatas non exhibet, dummodo $Q^n$ fuerit Functio rationalis ſeu uniformis, ipſius $x$. Prior autem æquatio $y^n + (P-y)^n = a^n$ hac gaudet prærogativa ut numerus dimenſionum ſit minor.

373. Neque vero hæ æquationes ſolum quæſtionem ſolvunt ſi $n$ ſit numerus integer affirmativus, ſed etiam ſi ſit vel negativus vel fractus. Sic

| ſi debeat eſſe | habebitur hæc æquatio |
|---|---|
| $\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{1}{a}$ | $aP = Py - yy$ <br> ſeu <br> $aQ + ayy = Qy$ |
| $\frac{1}{PM^2} + \frac{1}{PN^2} = \frac{1}{a^2}$ | $a^2y^2 + a^2(P-y)^2 = y^2(P-y)^2$ <br> ſeu <br> $a^2Q^2 + a^2y^4 = Qy^2$ |
| $\frac{1}{PM^3} + \frac{1}{PN^3} = \frac{1}{a^3}$ | $a^3y^3 + a^3(P-y)^3 = y^3(P-y)^3$ <br> ſeu <br> $a^3Q^3 + a^3y^6 = Qy^3$ |

&c.

 Pro exponentibus autem fractis ita res se habebit :

| si debeat esse | habebitur hæc æquatio |
| --- | --- |
| $\sqrt{PM}+\sqrt{PN}=\sqrt{a}$ | $\sqrt{y}+\sqrt{(P-y)}=\sqrt{a}$<br>seu<br>$y=\sqrt{ay}-\sqrt{Q}$<br>quæ ad rationalitatem reductæ præbent<br>$yy-Py+\frac{1}{4}(a-P)^2=0$<br>seu<br>$yy-(a-2\sqrt{Q})y+Q=0$ |
| $\sqrt[3]{PM}+\sqrt[3]{PN}=\sqrt[3]{a}$ | $\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{(P-y)}=\sqrt[3]{a}$<br>vel<br>$yy-Py+\frac{1}{27a}(a-P)^3=0$<br>seu<br>$\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{\frac{Q}{y}}=\sqrt[3]{a}$<br>vel<br>$yy-(a-3\sqrt[3]{aQ})y+Q=0$<br>&c. |

Hoc igitur modo omnes Curvæ algebraïcæ, in quibus ubique sit $PM^n + PN^n = a^n$, una æquatione generali comprehendi possunt, sive $n$ sit numerus integer affirmativus, sive negativus, sive fractus.

374. Quæ hic de conditione duarum Applicatarum unicuique Abscissæ $x$ respondentium sunt exposita, eadem methodo transferri possunt ad ternas Applicatas singulis Abscissis respondentes. Æquatio autem generalis pro Curvis, quas singulæ Applicatæ in tribus punctis secant est hæc

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0,$$

denotantibus litteris $P$, $Q$, & $R$ Functiones quascunque uniformes

formes ipsius $x$. Sint $p$, $q$, $r$ tres Applicatæ Abscissæ $x$ respondentes, quarum una quidem semper est realis, verum hic ad ea potissimum Curvæ loca spectamus, in quibus omnes tres Applicatæ sint reales. Erit autem ex natura æquationum $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$; & $R = pqr$. Quare, si Curva desideretur, in qua sit vel $p + q + r$ vel $pq + pr + qr$, vel $pqr$ quantitas constans, nil aliud est faciendum nisi ut vel $P$, vel $Q$, vel $R$ quantitas constituatur constans, binis reliquis manentibus arbitrariis.

375. Hinc quoque Curvæ inveniri poterunt, in quibus sit $p^n + q^n + r^n$, quantitas constans ubique; est enim, per ea quæ in superiori libro sunt tradita,

$$p + q + r = P$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$$
$$p^3 + q^3 + r^3 = P^3 - 3PQ + 3R$$
$$p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$$
$$p^5 + q^5 + r^5 = P^5 - 5P^3Q + 5PQQ + 5PPR - 5QR$$
&c.

Deinde, si $n$ sit numerus negativus, ponatur $z = \frac{1}{y}$; erit $z^3 - \frac{Qzz}{R} + \frac{Pz}{R} - \frac{1}{R} = 0$, & hujus æquationis tres radices sunt $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$. Hinc simili modo erit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{Q}{R}$$
$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{Q^2 - 2PR}{RR}$$
$$\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} = \frac{Q^3 - 3PQR + 3RR}{R^3}$$
$$\frac{1}{p^4} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r^4} = \frac{Q^4 - 4PQ^2R + 4QRR + 2P^2R^2}{R^4}$$
&c.

LIB. II. Hujusmodi ergo expressio quantitati constanti æqualis posita præbebit relationem idoneam inter Functiones $P$, $Q$ & $R$. Atque, si hujus æquationis ope, ex æquatione $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, una harum Functionum $P$, $Q$, vel $R$ eliminetur, habebitur æquatio pro Curva quæsita. Sic, si quæratur Curva in qua sit $p^3 + q^3 + r^3 = a^3$, fiet $P^3 - 3PQ + 3R = a^3$; &, ob $R = y^3 - Py^2 + Qy$, habebitur hæc æquatio $3y^3 - 3Py^2 + 3Qy + P^3 - 3PQ = a^3$ pro Curvis quæsito satisfacientibus..

376. Sive igitur $n$ sit numerus affirmativus sive negativus integer, solutio per datas formulas facile expedietur; at major difficultas occurrit si $n$ fuerit numerus fractus. Proponatur quærenda Linea curva, in qua sit $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = \sqrt{a}$. Sumantur utrinque quadrata: atque, ob $p + q + r = P$, habebitur $P + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} = a$, seu $\frac{a - P}{2} = \sqrt{pq} + \sqrt{pr} + \sqrt{qr}$. Sumantur denuo quadrata; atque, ob $pq + pr + qr = Q$, erit $\frac{(a - P)^2}{4} = Q + 2\sqrt{p^2qr} + 2\sqrt{pq^2r} + 2\sqrt{pqr^2} = Q + 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})\sqrt{pqr} = 2\sqrt{aR} + Q$: unde oritur $(a - P)^2 = 4Q + 8\sqrt{aR}$, seu $Q = \frac{(a - P)^2}{4} - 2\sqrt{aR}$. Quare, Curvæ quæsitæ continebuntur in hac æquatione $y^3 - Pyy + (\frac{1}{4}(a - P)^2 - 2\sqrt{aR})y - R = 0$; seu, (sublata irrationalitate, ob $R = \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a}$,) in hac æquatione $y^3 - Pyy + Qy - \frac{(aa - 2aP + PP - 4Q)^2}{64a} = 0$..

377. Hæc autem operatio nimis fit molesta, si radices altiorum potestatum proponantur: alia ergo via erit ineunda, quæ ex hoc exemplo perspicietur.. Quæratur nempe Curva in qua sit $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{a}$. Ponatur $\sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{pr} + \sqrt[3]{qr} = v$ : &, cum sit $\sqrt[3]{pqr} = \sqrt[3]{R}$, fiet $\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} + \sqrt[3]{r^2} = \sqrt[3]{aa} -$

$2v$; & $p + q + r = a - 3v\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{R} = P$. Deinde, $\sqrt[3]{p^2q^2} + \sqrt[3]{p^2r^2} + \sqrt[3]{q^2r^2} = v^2 - 2\sqrt[3]{aR}$, & $pq + pr + qr = Q = v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{RR}$. Inventis jam pro $P$ & $Q$ idoneis valoribus, sumendo pro $v$ Functionem quamcunque ipsius $x$, pro Curvis quæsitis obtinebitur hæc æquatio

$$y^3 - (a - 3v\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{R})y^2 + (v^3 - 3v\sqrt[3]{aR} + 3\sqrt[3]{R^2})y - R = 0.$$

378. His tamen difficultatibus non obstantibus solutio generalis concinnari poterit. Cum enim ex æquatione $y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$, $y$ denotet has tres Applicatas $p$, $q$, & $r$, ponatur $p = y$, erit $P = y + q + r$, & $Q = qy + ry + qr$, seu $q + r = P - y$, & $qr = Q - y(q + r) = Q - Py + yy$. Hinc prodit $q - r = \sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}$: ideoque

$$q = \tfrac{1}{2}(P - y) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)},$$

&

$$r = \tfrac{1}{2}(P - y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)}.$$

Quando ergo quæritur Curva in qua sit $p^n + q^n + r^n = a^n$, satisfaciet hæc æquatio

$$y^n + (\tfrac{1}{2}(P - y) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)})^n + (\tfrac{1}{2}(P - y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 + 2Py - 3yy - 4Q)})^n = a^n$$

quæ æque quæstionem solvit, sive $n$ fuerit numerus integer sive fractus.

379. Innumerabiles aliæ quæstiones circa conditionem harum trium Applicatarum eadem methodo resolvi possunt: velut, si pro $a^n$ Functio quæcunque ipsius $x$ assumatur; tum vero etiam, præter summam quarumcunque potestatum, aliæ Functiones ipsarum $p$, $q$, & $r$ proponi possunt, dummodo hæ quantitates ita æqualiter insint, ut earum permutatione nulla variatio

oriatur. Sic, istæ tres Applicatæ $p$, $q$, & $r$ eidem Abscissæ $x$ respondentes ita definiri poterunt, ut triangulum, quod ex iis formatur, constantem habeat aream. Hujus enim trianguli area erit $= \frac{1}{4}\sqrt{(2ppqq + 2pprr + 2qqrr - p^4 - q^4 - r^4)}$ quæ ponatur $= aa$. Cum igitur sit $p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 4PR + 2QQ$, & $p^2q^2 + p^2r^2 + q^2r^2 = Q^2 - 2PR$, fiet $16a^4 = 4P^2Q - 8PR - P^4$, & $R = \frac{1}{2}PQ - \frac{1}{8}P^3 - \frac{2a^4}{P}$; ideoque habebitur ista æquatio $y^3 - Pyy + Qy - \frac{1}{2}PQ + \frac{1}{8}P^3 + \frac{2a^4}{P} = 0$. Si $P$ capiatur constans $= 2b$, fiet insuper perimeter omnium horum triangulorum constans. Quare, si sumatur $Q = mxx + nbx + kaa$, prodibit Linea tertii ordinis hac æquatione expressa

$$y^3 + mxxy - 2byy + nbxy - mbxx + kaay - nbbx + \frac{a^4}{b} - kaab + b^3 = 0,$$

cujus hæc erit proprietas, ut trium Applicatarum $p$, $q$, & $r$ singulis Abscissis respondentium primum summa sit constans, $= 2b$, tum vero Area trianguli ex lateribus $p$, $q$, & $r$ formati sit ubique eadem $= aa$.

380. Similes quæstiones ejusdem methodi ope resolvi possunt circa quatuor pluresve Applicatas eidem Abscissæ respondentes; in quo negotio cum nulla amplius occurrat difficultas, ad alias progrediamur quæstiones, in quibus Applicatæ non eidem Abscissæ, sed diversis respondentes inter se comparentur. Proposita scilicet relatio quædam inter Applicatas $PM$ & $QN$, quarum altera Abscissæ $AP = +x$, altera Abscissæ $AQ = -x$ respondeat. Sit $y = X$, æquatio pro hac Curva, existente $X$ Functione quacunque ipsius $x$, atque hæc Functio $X$ dabit Applicatam $PM$: quod si vero loco $+x$ ubique ponatur $-x$, eadem Functio $X$ dabit alteram Applicatam $QN$. Si ergo $X$ esset Functio par ipsius $x$, puta $= P$, foret $QN = PM$, sin autem sit $X$ Functio impar

TAB. XIX. *Fig.* 80.

ipsius $x$, puta $= Q$, erit $QN = - PM$. Atque si $P$ & $R$ denotent Functiones pares, at $Q$ & $S$ Functiones impares ipsius $x$, fueritque æquatio pro Curva $y = \frac{P+Q}{R+S}$, erit $PM = \frac{P+Q}{R+S}$ & $QN = \frac{P-Q}{R-S}$.

381. Quærenda sit Curva hujus indolis, ut sit $PM + QN$ quantitas constans, nempe $= 2AB = 2a$. Atque manifestum est huic quæstioni satisfacere æquationem $y = a + Q$, existente $Q$ Functione impare ipsius $x$; erit enim $PM = a + Q$ & $QN = a - Q$ ideoque $PM + QN = 2a$, uti requiritur. Quod si ergo ponatur $y - a = u$, erit $u = Q$, quæ erit æquatio pro eadem Curva, sumta recta $Bp$ pro Axe & puncto $B$ pro Abscissarum $x$ initio, ita ut sit $Bp = x$ & $pM = u$. Æquatio autem $u = Q$ indicat Curvam partibus æqualibus utrinque circa Centrum $B$ alternatim dispositis præditam. Descripta ergo hujusmodi Curva quacunque $MBN$ sumtaque recta quacunque $PQ$ pro Axe, quæstioni ità satisfiet, ut demisso in hunc Axem ex Centro $B$ perpendiculo $BA$, sumtisque utrinque Abscissis æqualibus $AP = AQ$, semper futura sit summa $PM + QN$ constans $= 2AB$.

382. Pro Curvis autem, quæ duas habent partes æquales circa Centrum $B$ alternatim dispositas, duas invenimus supra æquationes, quæ inter Coordinatas $x$ & $u$ sunt.

I.

$$0 = \alpha x + \beta u + \gamma x^3 + \delta x^2 u + \epsilon x u u + \zeta u^3 + \eta x^5 + \theta x^4 u + \&c.$$

II.

$$0 = \alpha + \beta x^2 + \gamma x u + \delta u^2 + \epsilon x^4 + \zeta x^3 u + \eta x^2 u^2 + \theta x u^3 + \&c.$$

Quare, si in utraque harum æquationum, ponatur $u = y - a$, habebuntur duæ æquationes generales inter Coordinatas $x$ & $y$ pro Curvis algebraicis quæstioni propositæ satisfacientibus. Satisfacit ergo primo omnis Linea recta per punctum $B$ ducta, deinde quoque omnis Sectio conica Centrum habens in puncto $B$ quæstionem solvet. Quia vero hoc posteriori casu utri-

LIB. II. que Abscissæ $AP$, & $AQ$ gemina Applicata respondet, (nisi Curva existente Hyperbola, Applicatæ alteri Asymtotæ parallelæ capiantur;) bina habebuntur Applicatarum paria eandem summam constituentia.

383. Si quæratur Curva $MBN$, in qua non summa binarum Applicatarum $PM$ & $QN$, sed summa quarumcunque potestatum earum sit constans, solutio simili modo absolvetur. Oporteat enim esse $PM^n + QN^n = 2a^n$: atque perspicuum est huic conditioni satisfieri hac æquatione $y^n = a^n + Q$, existente $Q$ Functione quacunque impari ipsius $x$: erit enim $PM^n = a^n + Q$, & $QN^n = a^n - Q$: ideoque $PM^n + QN^n = 2a^n$. Ponatur $y^n - a^n = u$, atque æquatio $u = Q$ exprimet naturam Curvæ duabus partibus æqualibus alternis circa Centrum $B$ dispositis præditam inter Coordinatas $x$ & $u$. Quam ob rem si in æquationibus §. præcedenti datis ubique loco $u$ scribatur $y^n - a^n$, prodibunt æquationes generales pro Curvis quæsito satisfacientibus.

384. Cum igitur hujusmodi quæstiones nihil habeant difficultatis, proposita sit hæc quæstio, qua quæritur Curva $MBN$, ita ut in Axe a puncto fixo $A$, si sumantur utrinque Abscissæ $AP$, $AQ$ æquales, rectangulum Applicatarum $PM \cdot QN$ futurum sit magnitudinis constantis, puta $= aa$. Hujus quæstionis plures dari possunt solutiones particulares, quarum præcipuas, antequam in generalem inquiramus, hic evolvamus. Sit $P$ Functio par, & $Q$ Functio impar ipsius Abscissæ $AP = x$, ac ponatur Applicata $PM = y = P + Q$; ex qua, sumta $x$ negativa, fiet $QN = P - Q$. Oportet ergo esse $PM \times QN = PP - QQ = aa$, seu $P = \sqrt{(aa + QQ)}$: quæ expressio $\sqrt{(aa + QQ)}$, quia $QQ$ est Functio par ipsius $x$, ac propterea quoque ipsa Functionem parem exhibet, conve-

nientem valorem pro $P$ præbet. Hinc pro Curva quæsita habebitur ista æquatio $y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$, sumendo pro $Q$ Functionem quamcunque imparem ipsius $x$. CAP. XVI.

385. Cum autem signum radicale per se ambiguitatem involvat, unicuique Abscissæ $x$ gemina respondebit Applicata, altera affirmativa altera negativa; sic, Abscissæ $AP$ respondebunt Applicatæ $Q + \sqrt{(aa + QQ)}$ & $Q - \sqrt{(aa + QQ)}$; at Abscissæ $AQ$ convenient Applicatæ $-Q + \sqrt{(aa + QQ)}$ & $-Q - \sqrt{(aa + Q)}$: unde Curva partes habebit æquales circa punctum $A$, tanquam Centrum, alternatim positas. Neque vero hanc ambiguitatem a signo ortam tollere licet, sumendo pro $Q$ ejusmodi Functionem imparem, uti $\frac{aa}{4x} - x$, qua fiat $aa + QQ$ quadratum; fieret enim $\sqrt{(aa + QQ)} = \frac{aa}{4x} + x$ ideoque Functio impar, quæ in locum ipsius $P$ substitui non posset. Quocirca pro $Q$ ejusmodi Functio impar ipsius $x$ sumi debet, ut $aa + QQ$ non fiat quadratum.

386. Simili modo, si ponatur $y = (P + Q)^n$, fiet $QN = (P - Q)^n$: ideoque esse debebit $(P^2 - Q^2)^n = aa$. Hinc fiet $P^2 = a^{\frac{2}{n}} + Q^n$, & $P = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^n)}$, quæ quantitas, dummodo fuerit irrationalis, pro $P$ assumi poterit. Quare pro Curva quæstioni satisfaciente obtinebitur hæc æquatio $y = (Q + \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)})^n$. Constructio autem harum Curvarum erit facilis: describatur Curva quæcunque duas partes similes & æquales habens alternatim circa Centrum $A$ positas, hujusque Curvæ Applicata Abscissæ $AP = x$ respondens ponatur $= z$; erit $z$ Functio impar ipsius $x$; ideoque in locum ipsius $Q$ substitui poterit. At, ex æquatione inventa oritur $y^{\frac{1}{n}} - Q = \sqrt{(a^{\frac{2}{n}} + Q^2)}$: ideoque $Q =$

LIB. II.

$z = \frac{y^{\frac{2}{n}} - a^{\frac{2}{n}}}{2y^{\frac{1}{n}}}$. Ponatur $\frac{1}{n} = m$; atque, si in æquatione inter $z$ & $x$ data ubique ponatur $z = \frac{y^{2m} - a^{2m}}{2y^m}$, obtinebitur æquatio inter $x$ & $y$ pro Curva quæsita. Cum igitur inter $z$ & $x$ binas invenerimus æquationes; scilicet, vel

$$0 = x + \beta xx + \gamma xz + \delta zz + \varepsilon x^4 + \zeta x^3 z + \eta x^2 z^2 + \theta x z^3 + \&c.$$

vel

$$0 = \alpha x + \beta z + \gamma x^3 + \delta x^2 z + \varepsilon x z^2 + \zeta z^3 + \eta x^5 + \theta x^4 z + \&c.$$

si in his æquationibus ponatur $z = y^m - \frac{a^{2m}}{y^m}$ (divisorem 2 negligimus quia pro $Q$ quodcunque multiplum ipsius $z$ sumi potest), duæ orientur æquationes generales pro Curvis quæsito satisfacientibus.

387. Sit, præter $P$, quoque $R$ Functio par, & præter $Q$ quoque $S$ Functio impar ipsius $x$, ac statuatur pro Curvis quæsitis hæc æquatio $y = \frac{P+Q}{R+S} = PM$: erit ergo $QN = \frac{P-Q}{R-S}$, fietque $\frac{PP-QQ}{RR-SS} = aa$, cui conditioni facillime satisfit ponendo $y = \frac{P+Q}{P-Q}a$, vel etiam statuendo $y = (\frac{P+Q}{P-Q})^n a$. Hoc modo prius incommodum, quod cuique Abscissæ duæ pluresve Applicatæ respondebant, evitatur, atque ejusmodi Curvæ inveniuntur, ut singulis Abscissis unica tantum Applicata respondeat. Hinc Curva simplicissima satisfaciens erit Linea secundi ordinis hac æquatione $y = \frac{b+x}{b-x}a$ contenta; atque ideo Hyperbola. Hyperbola vero etiam satisfacit æquationi

æquationi prius inventæ $y = Q + \sqrt{(aa + QQ)}$, ponendo $Q = nx$: erit enim $yy - 2nxy = aa$. Unde huic problemati duplici modo per Hyperbolam satisfieri potest. CAP. XVI.

388. His præmissis, perspicuum est æquationem pro Curva quæsita ita comparatam esse debere, ut ea, si loco $x$ ponatur $-x$, & $\frac{aa}{y}$ loco $y$, nullam alterationem patiatur. Hujusmodi formulæ sunt $(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n})P$, & $(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n})Q$; si quidem $P$ Functionem parem & $Q$ imparem ipsius $x$ denotet. Quod si ergo æquatio formetur, quæ ex quotcunque hujusmodi formulis fuerit composita, ea erit pro Curva quæstioni satisfaciente. Quod si ergo $M$, $P$, $R$, $T$, &c., denotent Functiones quascunque pares ipsius $x$, atque $N$, $Q$, $S$, $V$, &c. Functiones impares, sequens æquatio generalis habebitur

$$0 = M + (\tfrac{y}{a} + \tfrac{a}{y})P + (\tfrac{yy}{aa} + \tfrac{aa}{yy})R + (\tfrac{y^3}{a^3} + \tfrac{a^3}{y^3})T \text{ \&c.}$$
$$+ (\tfrac{y}{a} - \tfrac{a}{y})Q + (\tfrac{yy}{aa} - \tfrac{aa}{yy})S + (\tfrac{y^3}{a^3} - \tfrac{a^3}{y^3})V \text{ \&c.}$$

quæ si multiplicetur per Functionem imparem ipsius $x$, Functiones pares in impares & vicissim permutabuntur: unde etiam hujusmodi æquatio satisfaciet

$$0 = N + (\tfrac{y}{a} + \tfrac{a}{y})Q + (\tfrac{yy}{aa} + \tfrac{aa}{yy})S + (\tfrac{y^3}{a^3} + \tfrac{a^3}{y^3})V \text{ \&c.}$$
$$+ (\tfrac{y}{a} - \tfrac{a}{y})P + (\tfrac{yy}{aa} - \tfrac{aa}{yy})R + (\tfrac{y^3}{a^3} - \tfrac{a^3}{y^3})T \text{ \&c.}$$

quæ æquationes a fractionibus liberatæ dabunt has æquationes rationales ordinis indefiniti $n$

I.

$$0 = a^n y^n M + a^{n-1} y^{n+1}(P+Q) + a^{n-2} y^{n+2}(R+S) + a^{n-3} y^{n+3}(T+V)\ \&c.$$
$$+ a^{n+1} y^{n-1}(P-Q) + a^{n+2} y^{n-2}(R-S) + a^{n+3} y^{n-3}(T-V)\ \&c.$$

II.

$$0 = a^n y^n N + a^{n-1} y^{n+1}(P+Q) + a^{n-2} y^{n+2}(R+S) + a^{n-3} y^{n+3}(T+V)\ \&c.$$
$$- a^{n+1} y^{n-1}(P-Q) - a^{n+2} y^{n-2}(R-S) - a^{n+3} y^{n-3}(T-V)\ \&c.$$

389. In formulis vero $(y^n + \frac{a^{2n}}{y^n})P$, & $(y^n - \frac{a^{2n}}{y^n})Q$ loco $n$ quoque numeros fractos scribere licet. Quare, si pro $n$ scribantur numeri $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. ex æquationibus generalibus hinc oriundis irrationalitas sponte evanescet, habebitur enim

$$0 = \frac{y+a}{\sqrt{ay}}P + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}}R + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}T + \&c.$$
$$+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}}Q + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}}S + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}V + \&c.$$

vel hæc æquatio

$$0 = + \frac{y+a}{\sqrt{ay}}Q + \frac{y^3+a^3}{ay\sqrt{ay}}S + \frac{y^5+a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}V + \&c.$$
$$+ \frac{y-a}{\sqrt{ay}}P + \frac{y^3-a^3}{ay\sqrt{ay}}R + \frac{y^5-a^5}{a^2y^2\sqrt{ay}}T + \&c.$$

quæ a fractionibus liberatæ abeunt in has

$$0 = + a^n y^{n+1}(P-Q) + a^{n-1} y^{n+2}(R+S) + a^{n-2} y^{n+3}(T+V)\ \&c.$$
$$+ a^{n+1} y^n (P+Q) + a^{n+2} y^{n-1}(R-S) + a^{n+3} y^{n-2}(T-V)\ \&c.$$

&

$$0 = + a^n y^{n+1}(P+Q) + a^{n-1} y^{n+2}(R+S) + a^{n-2} y^{n+3}(T+V)\ \&c.$$
$$- a^{n+1} y^n (P-Q) - a^{n+2} y^{n-1}(R-S) - a^{n+3} y^{n-2}(T-V)\ \&c.$$

390. Ex his quatuor æquationibus jam ex singulis Linearum ordinibus eæ, quæ problema resolvant, facile invenientur. Ac primo quidem, ex primo ordine satisfacit Linea recta Axi $AP$ parallela ac per punctum $B$ transiens. Ex ordine secundo binæ æquationes priores, faciendo $n = 1$, dant $\alpha axy + yy - aa = 0$, quæ ex secunda nascitur, ponendo $N = \alpha x$, & $P = 1$, & $Q = 0$. Prima enim nullam dat Lineam curvam; binæ posteriores æquationes dant, faciendo $n = 0$, $y(\alpha + \beta x) \pm a(\alpha - \beta x) = 0$. Ex ordine tertio binæ æquationes priores dant, faciendo $n = 1$

$$0 = ay(\alpha + \beta xx) + yy(\gamma + \delta x) + aa(\gamma - \delta x)$$

&

$$0 = \alpha ayx + yy(\gamma + \delta x) - aa(\gamma - \delta x)$$

binæ autem æquationes posteriores dant, ponendo $n = 0$, & $n = 1$

$$0 = y(\alpha + \beta x + \gamma xx) \pm a(\alpha - \beta x + \gamma xx)$$

&

$$0 = ay'(\alpha + \beta x) + y' \pm a'y(\alpha - \beta x) \pm a'$$

similique modo ex sequentibus ordinibus omnes Lineæ quæsito satisfacientes reperientur.

## CAPUT XVII.

*De inventione Curvarum ex aliis proprietatibus.*

391. Quæstiones, quas in præcedente Capite resolvimus, ita erant comparatæ, ut ad æquationem inter Coordinatas, sive rectangulas sive obliquangulas, facile revocari possunt. Nunc igitur ejusmodi proprietates contemplemur, quæ non immediate Applicatas inter se parallelas respiciant; veluti, si rectarum ex dato quodam puncto ad Curvam eductarum indoles quæpiam proponatur. Sit $C$ punctum, unde rectæ ad Curvam educantur $CM$, $CN$, atque proprietas quæpiam has rectas respiciens fuerit proposita: conveniet a modo hactenus usitato naturam Curvarum per Coordinatas exprimendi, ita recedere, ut istæ rectæ in æquationem introducantur.

TAB. XX. Fig. 81.

392. Cum igitur pluribus aliis modis naturæ Linearum æquationibus comprehendi queant, quæ inter duas variabiles formentur, in præsenti negotio quantitas rectæ $CM$ ex dato puncto $C$ ad Curvam eductæ alterius variabilis locum sustineat. Tum vero alia opus erit variabili, qua situs rectæ $CM$ definiatur; hunc in finem assumatur recta quæpiam $CA$ per punctum $C$ ducta pro Axe, atque angulus $ACM$, seu quantitas ab hoc angulo pendens, commodissime vicem alterius variabilis tenebit. Sit ergo recta $CM = z$, & angulus $ACM = \varphi$, cujus sinus, tangensve in æquationem ingrediatur; atque manifestum est, si detur æquatio quæcunque inter $z$ & $\sin. \varphi$, seu $\tang. \varphi$, per eam Curvæ $AMN$ naturam determinari, pro quovis enim angulo $ACM$, definitur longitudo rectæ $CM$, sicque punctum Curvæ $M$ determinatur.

393. Diligentius autem perpendamus hunc Lineas curvas exprimendi modum. Ac primo quidem æquetur distantia $z$ Functioni cuicunque sinus anguli $\varphi$; quæ Functio si fuerit uni-

formis: videatur recta $CM$ Curvæ in unico puncto $M$ occurrere, quia angulo $ACM = \varphi$ unicus valor rectæ $CM$ respondet. Verum, si angulus $\varphi$ duobus rectis augeatur, eadem manebit rectæ $CM$ per punctum $C$ ductæ positio, hoc tantum discrimine quod in plagam oppositam dirigatur; sicque alia ejusdem rectæ $CM$ intersectio cum Curva prodibit, etiamsi $z$ æquetur Functioni uniformi sinus anguli $\varphi$. Scilicet, sit $P$ Functio illa sinus anguli $\varphi$, ita ut sit $z = P$, unde oriatur punctum Curvæ $M$; augeatur nunc angulus $\varphi$ duobus rectis, seu ejus sinus statuatur negativus, quo facto abeat $P$ in $Q$, ut sit $z = Q$; hinc ergo prodibit nova intersectio ejusdem rectæ $CM$ productæ cum Curva $m$, sumendo $Cm = Q$.

CAP. XVII.

TAB. XX. Fig. 82.

394. Quamvis ergo $P$ sit Functio uniformis sinus anguli $\varphi$, tamen recta $CM$, sub dato angulo $ACM = \varphi$, per punctum $C$ ducta, Curvæ in duobus punctis $M$ & $m$ occurret, nisi sit $Q = -P$. Quod si ergo unaquæque recta $CM$ Curvæ in unico tantum puncto occurrere debeat, quantitatem illam $P$ Functionem esse oportet imparem sinus anguli $\varphi$. Hoc idem autem usu venit, si $P$ fuerit Functio impar cosinus anguli $\varphi$. Quam ob rem omnes Curvæ, quas singulæ rectæ ex $C$ eductæ in unico puncto intersecant, continebuntur in hac æquatione $z = P$; si quidem $P$ fuerit Functio impar cum sinus tum cosinus anguli $ACM = \varphi$.

395. Cum igitur Curvæ, quæ a rectis ex puncto $C$ ductis in unico puncto secantur, contineantur in æquatione $z = P$, si $P$ fuerit Functio impar sinus & cosinus anguli $\varphi$, seu ejusmodi Functio, quæ valorem negativum induat, si tam sinus quam cosinus anguli $\varphi$ statuatur negativus, hinc facile pro hujusmodi Curvis æquatio inter Coordinatas orthogonales reperiri poterit. Demisso enim ex puncto $M$ in Axem $CA$ perpendiculo $MP$, si dicatur $CP = x$, $PM = y$, erit $\frac{y}{z} = \mathit{fin.}\,\varphi$ & $\frac{x}{z} = \mathit{cof.}\,\varphi$: unde, si $P$ fuerit Functio impar ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$, omnes istæ Curvæ continebuntur in hac

TAB. XX. Fig. 81.

LIB. II. æquatione $z = P$. A simplicissimis ergo incipiendo, erit

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y};$$

atque ad altiores potestates ascendendo, erit

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y} + \frac{\epsilon x^3}{z^3} + \frac{\zeta x^2 y}{z^3} + \frac{\eta x y^2}{z^3} + \frac{\theta y^3}{z^3} + \frac{\iota x x}{y z} + \frac{\varkappa y y}{x z} + \frac{\lambda y z}{x x} + \&c.$$

396. Si hæc æquatio per $z$ dividatur, ubique pares tantum ipsius $z$ occurrent potestates: ideoque, cum sit $z = \sqrt{(xx + yy)}$, eliminando $z$ nulla irrationalitas in æquatione remanebit, prodibitque æquatio rationalis inter $x$ & $y$. Æquatio ergo generalis ita erit comparata, ut unitas, seu quantitas constans, æquetur Functioni $-1$ dimensionum ipsarum $x$ & $y$. Cujusmodi Functio si fuerit $P$, erit $C = P$; ideoque $\frac{1}{C} = \frac{1}{P}$; at $\frac{1}{P}$ erat Functio unius dimensionis ipsarum $x$ & $y$; unde, si Functio quæcunque unius dimensionis ipsarum $x$ & $y$ æquetur constanti, æquatio erit pro Curva, quam rectæ per punctum $C$ eductæ in unico puncto intersecant.

397. Sit $P$ Functio $n$ dimensionum ipsarum $x$ & $y$; & $Q$ Functio $n + 1$ dimensionum; erit $\frac{Q}{P}$ Functio unius dimensionis: ideoque omnes Curvæ, quas hic contemplamur, continebuntur in æquatione $\frac{Q}{P} = c$, seu $Q = cP$. Denotante ergo $n$ numerum quemcunque, æquatio generalis pro his Curvis erit

$$\alpha x^{n+1} + \beta x^n y + \gamma x^{n-1} y^2 + \delta x^{n-2} y^3 + \epsilon x^{n-3} y^4 + \&c.$$
$$= c(Ax^n + Bx^{n-1} y + Cx^{n-2} y^2 + Dx^{n-3} y^3 + \&c.)$$

Ex qua Lineæ singulorum ordinum, quæ a rectis ex puncto $C$

eductis in unico tantum puncto secantur in sequentibus æquationibus continebuntur.

I.

$$\alpha x + \beta y = c$$

II.

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma yy = c(Ax + By)$$

III.

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 = c(Ax^2 + Bxy + Cyy)$$

IV.

$$\alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta xy^3 + \epsilon y^4 = c(Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3)$$

&c.

398. Primum ergo Linea recta satisfacit, quam utique constat ab aliis Lineis rectis per datum punctum ductis non nisi in uno puncto secari posse. Secunda æquatio est pro Sectionibus conicis generalis, dummodo Sectio conica per ipsum punctum $C$ transeat, quæ intersectio, cum omnibus rectis ex $C$ eductis communis sit, non computatur; quoniam ergo Sectiones conicæ a recta quacunque nonnisi in duobus punctis secari possunt, omnis recta per punctum $C$ in ipsa Curva utcunque sumtum transiens unicam tantum præbebit intersectionem. Lineæ autem curvæ sequentium ordinum omnes per ipsum punctum $C$ transeunt, quæ intersectio omnibus rectis per $C$ ductis communis pariter non computatur. Atque idcirco ex altioribus ordinibus in æquationibus exhibitis eæ tantum continentur, quas rectæ per $C$ ductæ in unico puncto intersecant. Sic igitur omnes enumeravimus Curvas algebraïcas, quæ a rectis per datum punctum $C$ ductis nonnisi in unico puncto trajiciuntur.

399. Progrediamur jam ad eas Curvas investigandas quas singulæ rectæ per punctum $C$ ductæ vel in duobus punctis intersecant, vel nusquam; siquidem radices æquationis duplicem intersectionem indicantis fiant imaginariæ. Cum igitur pro quovis angulo $ACM = \varphi$, recta $CM = z$ duplicem sortiatur valorem, ea per æquationem quadraticam definietur. Sit

 itaque $zz - Pz + Q = o$ : ubi $P$ & $Q$ sint Functiones anguli $\varphi$ seu ejus sinus cosinusve. Quoniam vero recta $CM$ Curvam nonnisi in duobus punctis $M$ & $N$ secare debet, non solum $P$ & $Q$ Functiones uniformes anguli $\varphi$ esse oportet, sed etiam aucto angulo $\varphi$ duobus rectis nullæ novæ intersectiones oriri debent : id quod evenit si $P$ fuerit Functio impar sinus & cosinus anguli $\varphi$, ita ut valorem induat negativum, si sinus & cosinus negative accipiantur : $Q$ autem esse debet Functio par ejusdem sinus & cosinus.

400. Positis autem Coordinatis orthogonalibus $CP = x$, & $PM = y$; erit $\frac{y}{z} = fin.\varphi$, & $\frac{x}{z} = cof.\varphi$; ideoque $P$ debebit esse Functio impar ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$; & $Q$ Functio par ipsarum $\frac{x}{z}$ & $\frac{y}{z}$. Ex his colligitur fore $\frac{P}{z}$ Functio rationalis ipsarum $x$ & $y$, atque adeo Functio homogenea $-1$ dimensionum. Simili modo erit $\frac{Q}{zz}$ Functio rationalis ipsarum $x$ & $y$ homogenea $-2$ dimensionum. Quod si ergo fuerit $L$ Functio homogenea $(n + 2)$ dimensionum, $M$ Functio homogenea $(n + 1)$ dimensionum, atque $N$ Functio homogenea $n$ dimensionum quæcunque ipsarum $x$ & $y$, fractio $\frac{M}{L}$ exhibebit Functionem convenientem pro $\frac{P}{z}$, & $\frac{N}{L}$ Functionem convenientem pro $\frac{Q}{zz}$. Quare, cum sit $zz - Pz + Q = o$, erit $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{zz} = o$ : unde æquatio generalis pro Curvis, quæ a rectis per punctum $C$ ductis in duobus punctis secantur, erit $1 - \frac{M}{L} + \frac{N}{L} = o$, seu $L - M + N = o$; ubi est $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L} = \frac{N(xx+yy)}{L}$; eritque adeo $P$ Functio irrationalis ipsarum $x$ & $y$, ob $z = \sqrt{(xx+yy)}$, & $Q$ est Functio rationalis nullius dimensionis.

401. Hinc

401. Hinc jam facile erit ex quovis Linearum ordine eas exhibere, quæ a rectis per datum punctum $C$ ductis in duobus punctis vel nusquam interſecentur. Pro ſecundo ſcilicet ordine fiat $n = 0$, ac prodibit æquatio generaliſſima Sectionum conicarum.

$$\alpha xx + \beta xy + \gamma yy - \delta x - \epsilon y + \zeta = 0.$$

Puncto ergo $C$ ſumto ubicunque, omnis recta per id ducta Sectionem conicam vel in duobus punctis vel nusquam interſecabit. Interim tamen fieri poteſt, ut unaquæpiam recta Curvam in uno tantum puncto interſecet; quod, cum inter infinitas illas rectas per $C$ ductas vel uni vel duabus tantum uſuveniat, hac exceptio nullius erit momenti: quin etiam ita hoc paradoxon explicari poteſt, ut altera interſectio in infinitum abeat; quam ob cauſam iſta exceptio noſtro aſſerto nullam vim inferre cenſenda eſt.

402. Quo autem pateat quibus caſibus iſta exceptio locum habeat æquationem inter $x$ & $y$ reducamus ad æquationem inter $z$ & angulum $ACM = \varphi$; quæ, ob $y = z . \text{ſin.} \varphi$, & $x = z . \text{coſ.} \varphi$, abibit in hanc

$$z^2 (\alpha (\text{coſ.}\varphi)^2 + \beta . \text{ſin.} \varphi . \text{coſ.} \varphi + \gamma (\text{ſin.} \varphi)^2) - z (\delta . \text{coſ.} \varphi + \epsilon . \text{ſin.} \varphi) + \zeta = 0:$$

ex qua patet, ſi fuerit coëfficiens ipſius $z^2$ æqualis nihilo, unicam tantum interſectionem locum habere; quod ergo evenit ſi fuerit $\alpha + \beta . \text{tang.} \varphi + \gamma (\text{tang.} \varphi)^2 = 0$. Quod ſi ergo hæc æquatio duas habeat radices reales, duobus caſibus recta per $C$ educta Curvam in unico tantum puncto ſecabit. Quoniam vero ejuſdem æquationis radices indicant Aſymtotas Curvæ, perſpicuum eſt Hyperbolas a rectis alteri Aſymtotæ parallelis in unico tantum puncto ſecari, cujuſmodi rectæ per punctum $C$ tranſeuntes duæ tantum dantur. In Parabola vero unica recta Axi parallela hanc exceptionem patietur. Verum ſi Sectio conica fuerit Ellipſis, ubicunque aſſumatur punctum

 $C$, omnis recta per id ducta Curvam vel nusquam vel in duobus punctis secabit.

403. Lineæ tertii ordinis ista proprietate gaudentes, posito $n = 1$, continebuntur in hac æquatione

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 - \epsilon x^2 - \zeta xy - \eta y^2 + \theta x + \iota y = 0,$$

quæ quidem in se complectitur omnes Lineas tertii ordinis, quæ ergo omnes huc pertinent, dummodo punctum $C$ in ipsa Curva capiatur. Facto enim $x = 0$, simul $y$ valorem obtinet evanescentem. Simili modo pro Curvis quarti ordinis quæsito satisfacientibus punctum $C$ non solum in Curva sed simul ejus punctum duplex esse debet; omnis ergo Linea quarti ordinis puncto duplici prædita quæsito satisfaciet, dummodo punctum $C$ in puncto duplici statuatur. Sin autem $C$ fuerit adeo Curvæ punctum triplex, tum omnis recta per id ducta Curvam in unico puncto intersecabit, pertinebitque ad casum primo consideratum. Pari modo Lineæ quinti ordinis satisfacient, si punctum $C$ in earum puncto triplici statuatur, atque ita porro. Perpetuo autem notandum est, si recta per $C$ ducta parallela fiat alicui Asymtotæ rectæ, seu Axi Asymtotæ parabolicæ, tum semper unicam dari intersectionem, ultera in infinitum abeunte.

404. Egregie hæc conveniunt cum natura Linearum cujusque ordinis: quia enim Linea cujusque ordinis a Linea recta in tot punctis intersecari potest, quot exponens ordinis continet unitates, (atque revera in totidem punctis intersecatur, nisi aliquot intersectiones vel fiant imaginariæ vel in infinitum abeant:) & quia hic omnes intersectiones, sive reales sive in infinito factas sive imaginarias, æque computamus, easque tantum excludimus quæ in ipso puncto $C$ fiunt; manifestum est cum Linea ordinis $n$ in $n$ punctis a quaque Linea recta secetur, punctum $C$ in puncto totuplici, quot numerus $n - 2$ continet unitates, collocari debere, ut intersectio duplex prodeat.

405. His notatis facile erit problemata, quæ circa relationem inter quosque binos ipsius $z$ valores $CM$ & $CN$ proponi solent, vel resolvere, vel solutionis inconvenientiam ostendere. Cum enim duo ipsius $z$ valores $CM$ & $CN$ sint radices hujus æquationis $zz - Pz + Q = 0$, erit ipsorum summa $= P$, & rectangulum eorum $CM.CN = Q$. Quare, si primum requirantur ejusmodi Curvæ, in quibus ubique sit summa $CM + CN$ constans, Functionem $P$ quantitatem constantem esse oporteret. Cum autem ex quæstionis natura unaquæque recta per $C$ ducta Curvæ in duobus tantum punctis occurrere debeat, necesse est ut sit $P = \frac{Mz}{L} = \frac{M\surd(xx+yy)}{L}$ (§. 399), quæ quantitas irrationalitatem involvens nunquam constans esse potest. Atque idcirco nulla datur Curva huic quæstioni proprie satisfaciens.

406. Quod si autem ista conditio, qua duæ tantum cujusque rectæ per $C$ ductæ intersectiones cum Curva postulantur, omittatur atque ejusmodi quærantur Curvæ, quæ quidem plures duabus intersectiones exhibeant, inter eas autem duæ $M$ & $N$ ejusmodi adsint, ut sit $CM + CN$ quantitas constans, tales Curvæ innumerabiles exhiberi poterunt, ponendo $P =$ quantitati illi constanti $CM + CN = a$. Erit enim $zz - az + Q = 0$, denotante $Q$ Functionem $\frac{Nzz}{L}$; & quia hæc æquatio adhuc irrationalitate laborat, ea sublata, erit $a^2 z^2 = (zz + Q)^2$, seu $a^2 = zz(1 + \frac{N}{L})^2$, seu $a^2 L^2 = (xx + yy)(L^2 + 2LN + NN)$, in qua erit $L$ Functio homogenea $n + 2$, at $N$ Functio homogenea $n$ dimensionum ipsarum $x$ & $y$. Simplicissima ergo Curva hoc sensu quæstionem resolvens habebitur si ponatur $L = xx + yy$ & $N = \pm bb$, eritque $aa(xx + yy) = (xx + yy \pm bb)^2$, quæ est pro Linea quarti ordinis complexa; complectitur enim duos Circulos in $C$ concentricos. Curvæ autem continuæ simplicissimæ quæsito satisfacientes erunt sexti ordinis, ponendo $L = \alpha xx + \beta xy +$

LIB. II. $\gamma y^4$, & $N = \pm bb$, pro quibus æquatio erit $aa(\alpha xx + 6xy + \gamma yy)^2 = (xx + yy)(\alpha xx + 6xy + \gamma yy \pm bb)^2$. Sit $\alpha = 1$, $6 = 0$, & $\gamma = 0$, erit $yy + xx = \frac{aax^4}{x^4 \pm 2bbxx + b^4}$, seu $y = \frac{x\sqrt{(aaxx - x^4 \mp 2bbxx - b^4)}}{xx \pm bb}$.

407. Sin autem hujusmodi solutiones, quibus rectæ per $C$ ductæ Curvam in pluribus quam duobus punctis intersecant, excludantur, quam conditionem natura quæstionis requirere videtur, nullæ prorsus Curvæ quæstioni satisfacere sunt dicendæ; ac propterea nulla dabitur Linea continua, quæ a rectis per $C$ ductis ita in duobus tantum punctis $M$ & $N$ intersecetur, ut summa $CM + CN$ sit constans. At vero si istæ intersectiones hujus indolis postulentur, ut rectangulum $CM \times CN$ debeat esse constans, quæ proprietas in Circulum ita competit ut is satisfaciat ubicunque punctum $C$ capiatur, infinitæ aliæ Lineæ curvæ inveniri poterunt, quæ idem præstent. Debebit enim $Q$ esse quantitas constans, æqualis scilicet illi rectangulo $CM.CN$, quod sit $= aa$; quæ positio, cum sit $Q = \frac{Nzz}{L}$, ac propterea Functio rationalis ipsarum $x$ & $y$, non pugnat.

408. Sit igitur $\frac{Nzz}{L} = aa$, seu $L = \frac{Nzz}{aa} = \frac{N(xx+yy)}{aa}$, atque Curvæ quæsito satisfacientes omnes continebuntur in hac æquatione $\frac{N(xx+yy)}{aa} - M + N = 0$, seu $Maa = N(xx + yy + aa)$, ubi $M$ denotat Functionem quamcunque homogeneam $n + 1$ dimensionum, $N$ vero Functionem homogeneam $n$ dimensionum ipsarum $x$ & $y$, ita ut sit $\frac{M}{N} = \frac{xx + yy + aa}{aa}$ Functio unius dimensionis ipsarum $x$ & $y$. Hæc ergo æquatio omnes complectitur Curvas, quæ a rectis per $C$ ductis in duobus tantum punctis $M$ & $N$ ita secantur, ut rectangulum $CM.CN$ sit ubique constans $= aa$.

409. Cum igitur $\frac{M}{N}$ sit Functio homogenea unius dimensionis ipsarum $x$ & $y$, casus simplicissimus prodibit si ponatur $\frac{M}{N} = \frac{\alpha x + \beta y}{a}$, ex quo orietur hæc æquatio $xx + yy - a(\alpha x + \beta y) + aa = 0$, quæ semper est pro Circulo: &, cum sit æquatio pro Circulo generalis inter Coordinatas orthogonales, manifestum est Circulum quæsito satisfacere, ubicunque punctum $C$ accipiatur, omnino uti ex Elementis constat. Præter Circulum ergo ex Sectionibus conicis nulla alia Curva huic quæstioni satisfacit. Verum ex singulis ordinibus Linearum sequentibus infinita Linearum satisfacientium copia exhiberi potest: & quidem omnes, quæ ex quolibet ordine satisfaciunt. Sic Lineæ tertii ordinis, quæ isthac proprietate gaudent, continebuntur in hac æquatione

$$\frac{\alpha xx + \beta xy + \gamma yy}{a(\delta x + \epsilon y)} = \frac{xx + yy + aa}{aa}.$$

seu

$$(\delta x + \epsilon y)(xx + yy) - a(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy) + aa(\delta x + \epsilon y) = 0.$$

Atque simili modo ex omnibus sequentibus Linearum ordinibus eæ, quæ satisfaciunt, exhibebuntur.

410. Proposita jam sit hæc quæstio, ut inter omnes Lineas curvas, quæ a rectis per punctum $C$ ductis in duobus punctis secantur, eæ definiantur, in quibus sit summa quadratorum $CM^2 + CN^2$ quantitas constans, puta $= aa$. Cum igitur sit $CM + CN = P$, & $CM.CN = Q$, erit $CM^2 + CN^2 = PP - 2Q$; debebit ergo esse $PP - 2Q = 2aa$, seu $Q = \frac{PP - 2aa}{2}$. Quare, ob $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L}$, erit $\frac{2Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} - 2aa$; ideoque $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$; quæ æquatio, cum sit $L$ Functio $n+2$ dimensionum, $M$ Functio $n+1$ dimensionum, & $N$ Functio $n$ dimensionum

LIB. II. ipsarum $x$ & $y$, nullam implicat difficultatem. Sumtis ergo pro $L$ & $M$ ejusmodi Functionibus, erit $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$: unde pro Curvis quæsito satisfacientibus ista resultat æquatio generalis

$$L - M + \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz} = 0,$$

seu

$$2LL(xx+yy) - 2LM(xx+yy) + MM(xx+yy) - 2aaLL = 0;$$

quæ, si sit $M = 0$, præbet Circulum cujus Centrum in $C$, quem quæsito satisfacere per se est perspicuum.

411. Ponamus $n + 1 = 0$, ut sit $M$ quantitas constans $= 2b$, & $L = \alpha x + \beta y$, atque orietur Linea quarti ordinis hac æquatione contenta

$$(\alpha x+\beta y)^2(xx+yy-aa) - 2b(\alpha x+\beta y)(xx+yy) + 2bb(xx+yy) = 0.$$

Alia æquatio quarti ordinis reperitur, si ponatur $L = xx + yy$ & $M = 2(\alpha x + \beta y)a$, tum enim æquatio per $2xx + 2yy$ divisa dabit

$$(xx+yy)^2 - 2a(\alpha x+\beta y)(xx+yy) + 2aa(\alpha x+\beta y)^2 - aa(xx+yy) = 0.$$

Nisi autem divisio per $xx + yy$ succedat, æquatio inventa (ponendo $2M$ loco $M$), quæ est

$$LL(xx+yy) - 2LM(xx+yy) + 2MM(xx+yy) - aaLL = 0,$$

semper erit ordinis $2n + 6$, ideoque ex quolibet ordine pari obtinetur æquatio pro Curva satisfaciente. Præterea vero, si $L$ per $xx + yy$ fuerit divisibilis, scilicet, si, denotante $N$ Functionem quamcunque homogeneam $n$ dimensionum ipsarum $x$ & $y$, fuerit $L = (xx+yy)N$, orietur alia æquatio generalis hæc

$$NN(xx+yy)^2 - 2MN(xx+yy) + 2MM - aaNN(xx+yy) = 0,$$

quæ est ordinis $2n + 4$, ita ut ex singulis ordinibus paribus duplex nascatur æquatio pro Curvis proposita proprietate gau-

dentibus. Sic, ex ordine sexto satisfacient Curvæ in his duabus æquationibus contentæ

$$(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy)^2 (xx + yy - aa) - 2a(\delta x + \epsilon y)(xx + yy)$$
$$(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy - a(\delta x + \epsilon y)) = 0,$$

&

$$(\delta x + \epsilon y)^2 (xx + yy)(xx + yy - aa) =$$
$$aa(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy)((\delta x + \epsilon y)(xx + yy) - a(\alpha xx + \beta yy + \gamma yy)).$$

In nullo ergo Linearum ordine impari ulla datur Linea hanc quæstionem resolvens.

412. Si jam non quærantur ejusmodi Curvæ, in quibus sit summa quadratorum $CM^2 + CN^2$ constans, sed in quibus sit $CM^2 + CM.CN + CN^2$ vel generaliter $CM^2 + n.CM \times CN + CN^2$ quantitas constans; problema simili modo resolutionem admittet. Cum enim sit $CM^2 + n.CM.CN + CN^2 = P^2 + (n-2)Q$, ponatur $P^2 + (n-2)Q = aa$, eritque $Q = \frac{aa - PP}{n-2}$, quæ æquatio nullo incommodo laborat. Cum igitur sit $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nzz}{L}$, erit $\frac{M^2z^2}{L^2} + \frac{(n-2)Nzz}{L} = aa$; ideoque $N = \frac{aaL}{(n-2)zz} - \frac{M^2}{(n-2)L}$. Quare, cum æquatio pro Curva sit $L - M + N = 0$, habebitur pro hac proprietate, qua $CM^2 + n.CM.CN + CN^2$ debet esse constantis magnitudinis $= aa$, ista æquatio

$$(n-2)LLzz - (n-2)LMzz + aaLL - M^2zz = 0$$

seu, ob $zz = xx + yy$, erit

$$aaLL + (xx+yy)((n-2)L^2 - (n-2)LM - M^2) = 0,$$

existente $L$ Functione $m+2$, & $M$, $m+1$ dimensionum ipsarum $x$ & $y$. Sit $N$ Functio quæcunque homogenea $m$ dimensionum, ac ponatur $L = (xx + yy)N$, prodibit alia æquatio generalis hæc

$$aa(xx+yy)N^2 + (n-2)(xx+yy)^2N^2 - (n-2)(xx+yy)MN - M^2 = 0.$$

Lib. II. 413. Si statuatur $n=2$, ut sit $(CM+CN)^2=aa$, fiet; vel $aaLL=(xx=yy)MM$, vel $MM=aa(xx+yy)N^2$. Utraque autem æquatio cum sit homogenea, continebit duas pluresve æquationes hujus formæ $\alpha y = \beta x$; ideoque quæsito satisfieri non poterit nisi duabus pluribusve rectis per punctum $C$ ductis, quæ autem cum eo sensu, quo quæstio proponitur, non satisfaciant, perspicuum est hoc problema nullam admittere solutionem, uti supra jam notavimus: deberet enim esse $CM+CN=$ constanti $a$. Quod si vero statuatur $n=-2$, ita ut quadratum differentiæ $(CN-CM)^2$, ideoque ipsa differentia $MN$ deberet esse constans, orientur hæ duæ æquationes

$$aaLL=(xx+yy)(2L-M)^2$$
&
$$aa(xx+yy)NN=(2(xx+yy)N-M)^2$$

unde simplicissima solutio oritur, si ponatur $N=1$ & $M=2bx$; erit enim

$$aa(xx+yy)=4(xx+yy-bx)^2,$$

seu, posito $aa=8cc$ erit,

$$(xx+yy)^2=2(cc+bx)(xx+yy)-bbxx.$$

Ergo $xx+yy=cc+bx\pm c\sqrt{(cc+2bx)}$,

atque

$$y=\sqrt{(cc+bx-xx\pm c\sqrt{(cc+2bx)})}.$$

414. Dantur ergo innumerabiles Lineæ curvæ, quæ a rectis per punctum $C$ ductis ita in duobus punctis $M$ & $N$ secantur, ut intervallum $MN$ perpetuo sit constans. Ac primo quidem, patet huic conditioni satisfacere Circulum in $C$ Centrum habentem, erit enim tum perpetuo intervallum $MN=$ Diametro Circuli; prodit autem Circulus ex æquationibus generalibus, si ponatur $M=0$. Tum vero, post Circulum, satisfaciunt Lineæ quarti ordinis hac æquatione $aa(xx+yy)=4(xx+yy-bx)^2$, atque hac $aaxx=(xx+yy)(2x-2b)^2$, contentæ; ad quarum formam cognoscendam expediet ad æquationem

æquationem inter $z$ & ang. $\varphi$ regredi. Cum igitur ſit $xx + yy = zz$, & $x = z. cof. \varphi$, & $y = z. ſin. \varphi$, poſito $a = 2c$, erit primo CAP. XVII.

$$cczz = (zz - bz. cof. \varphi)^2$$

ſeu

$$b. cof. \varphi \pm c = z.$$

tumque

$$cc(cof. \varphi)^2 = (z. cof. \varphi - b)^2$$

ſeu

$$z = \frac{b}{cof. \varphi}$$

ex quibus facilis Curvarum conſtructio naſcitur.

415. Ad Curvam enim æquatione $z = b. cof. \varphi \pm c$ contentam conſtruendam, per $C$ ducatur recta $ACB$, in qua ſumatur $CD = b$, & ex $D$ ſumatur utrinque $DA = DB = c$, erunt primo puncta $A$ & $B$ in Curva quæſita. Tum, ducta quavis recta $NCM$ per $C$, ex $D$ in eam demittatur perpendiculum $DL$, & ab $L$ utrinque ſumatur $LM = LN = c$, erunt puncta $M$ & $N$ in quæſita Curva; ideoque perpetuo intervallum $MN = 2c$, uti quæſtio poſtulat. TAB. XX. Fig. 83, 84, 85.

Hic notandum eſt, ſi fuerit $CD = b$ minor quam $c$, Curvam in $C$ habituram eſſe punctum conjugatum. Fig. 83.

Sin autem ſit $b = c$, Curva in $C$ Cuſpide erit prædita, evaneſcente intervallo $AC$. Fig. 84.

Denique, ſi ſit $b$ minor quam $c$, punctum $A$ inter $C$ & $B$ cadet, Curvaque in $C$ habebit nodum ſeu punctum duplex. Ceterum harum Curvarum Diameter erit recta $ACB$, & quæ huic normaliter inſiſtit $ECF$ erit $= 2c$. Fig. 85.

416. Præter has Curvas in ſe redeuntes ex Linearum ordine quarto, etiam ſatisfaciunt ex eodem ordine aliæ in infinitum excurrentes, quæ hac æquatione $z = \frac{b}{cof. \varphi} \pm c$ continentur. Quarum conſtructio ita ſe habebit; ducta per $C$ recta principali $CAB$, ſumatur $CD = b$, capiaturque $DA = DB = c$; erunt puncta $A$ & $B$ in Curva. Deinde, per $D$ ducatur nor- TAB. XXI. Fig. 86.

LIB. II. malis $EDF$; & , acta recta quacunque $CL$, erit $CL = \frac{b}{cos. \varphi}$, vocato angulo $DCL = \varphi$. Tum perpetuo abscindatur $LM = LN = c$, atque puncta $M$ & $N$ determinabunt Curvam quæsitam. Ex hac autem constructione perspicuum est, Curvam sic descriptam esse *Conchoidem* Veterum, polum $C$ habentem, & Asymtotam rectam $EF$, ad quam quatuor Curvæ rami in infinitum convergunt. Vocatur autem portio $hBh$ *Conchois exterior*, & $gAg$ *interior*, præter quas partes in $C$ punctum existit conjugatum.

417. Hæ Curvæ ex Linearum ordine quarto satisfaciunt. Facile autem erit Curvas altiorum ordinum quot libuerit exhibere. Quod si enim fuerit $P$ Functio impar sinus & cosinus anguli $\varphi$, tum ista æquatio $z = bP + c$ præbebit Curvam continuam, quam omnes rectæ per $C$ ductæ ita in duobus punctis $M$ & $N$ secabunt, ut intervallum $MN$ futurum sit constans $= 2c$. Referri autem hæ Curvæ omnes poterunt ad genus Conchoidalium, loco rectæ $EF$ directricis substituendo Lineam quamcunque Curvam æquatione $z = bP$ contentam. Supra autem vidimus hanc æquationem in se complecti Lineas curvas, quæ a rectis per punctum $C$ ductis nonnisi in uno puncto secentur. Quare, ob intervallum $c$ arbitrarium, ex unaquaque Curva $z = bP$ innumerabiles Curvæ ad præsens institutum accommodatæ describi poterunt.

TAB. XXI. Fig. 87. 418. Sumatur scilicet pro lubitu Curva $CEDLF$, quæ ab omnibus rectis per punctum $C$ ductis in unicis tantum punctis $D$, $L$, secetur. Tum in his singulis rectis $CL$ productis utrinque ab $L$ capiantur intervalla æqualia $LM = LN = c$; eruntque puncta $M$ & $N$ in Curva quæsita. Sic igitur motu continuo describi poterit Curva $AMPCQBNRC$, quæ a singulis rectis per $C$ ductis in binis punctis $M$ & $N$ ita intersecabitur, ut intervallum $MN$ sit perpetuo constans $= 2c$. Ubi notandum est, si Curva $CEDF$ fuerit Circulus per punctum $C$ ductus, tum Curvam descriptam fore eandem Lineam quarti ordinis, quam primo invenimus §. 414.

419. Sic igitur satisfecimus quæstioni, qua quærebantur Lineæ curvæ $AMN$ a rectis per punctum $C$ ductis ita secandæ in duobus punctis $M$ & $N$, ut esset $CN - CM$ seu $CM^2 - 2CM.CN + CN^2$ perpetuo quantitas constans. Paucis igitur adhuc evolvamus casum, quo $CM^2 + CM.CN + CN^2$ debet esse quantitas constans. In §. 412. ergo poni debet $n = 1$, sicque nascetur vel ista æquatio CAP. XVII. TAB. XX. *Fig.* 81.

$$aaLL = (xx+yy)(L^2 - LM + M^2)$$

existente $L$ Functione $m+1$, & $M$ Functione $m$ dimensionum ipsarum $x$ & $y$. Vel orietur hæc altera æquatio

$$aa(xx+yy)NN = (xx+yy)^2 NN - (xx+yy)MN + MM$$

in qua $M$ est Functio homogenea una dimensione superior ipsarum $x$ & $y$, quam Functio $N$.

420. Primum quidem perspicuum est, si ponatur $M = 0$, prodire Circulum, cujus Centrum in puncto $C$ sit constitutum; qui, cum omnes rectæ ex $C$ ad Curvam ductæ sint æquales, etiam omnibus hujus generis quæstionibus satisfacit. Pro præsenti autem casu post Circulum Curvæ simplicissimæ prodibunt, si in priori æquatione ponatur $M = b$ & $L = x$, eritque

$$aaxx = (xx+yy)(xx - bx + bb)$$

sive

$$yy = \frac{xx(aa - bb + bx - xx)}{bb - bx + xx}.$$

Quod si autem in altera æquatione ponatur $N = 1$, & $M = bx$, habebitur quoque Linea quarti ordinis

$$aa(xx+yy) = (xx+yy)^2 - bx(xx+yy) + bbxx,$$

seu

$$xx + yy = \tfrac{1}{2}bx + \tfrac{1}{2}aa \pm \surd(\tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{1}{2}aabx - \tfrac{3}{4}bbxx)$$

quæ pariter, ac prior, quæstioni satisfaciet.

LIB. II. 421. His expeditis quæstionibus, consideremus altiores potestates binorum ipsius $z$ valorum ex æquatione $zz - Pz + Q = 0$, existente $P = \frac{Mz}{L}$ & $Q = \frac{Nzz}{L}$: ubi $L$ Functionem homogeneam $n+2$; $M$, $n+1$ & $N$, $n$ dimensionum ipsarum $x$ & $y$ significat; estque $x =$ Abscissæ $CP$ & $y =$ Applicatæ $PM$. Proposita igitur sit quæstio, qua binæ intersectiones $M$ & $N$ ejus indolis requiruntur, ut sit $CM^3 + CN^3 = a^3$. Cum ergo sit, ex æquationis $zz - Pz + Q = 0$, natura, $CM^3 + CN^3 = P^3 - 3PQ$ debebit esse $P^3 - 3PQ = a^3$: quæ æquatio, cum $P^3$ & $PQ$ sint quantitates irrationales, locum habere nequit. Huic ergo quæstioni in stricto sensu prorsus satisfieri non potest: sin autem numerus intersectionum non spectetur etiamsi duabus plures prodeant, tum quidem infinitis modis Curvæ satisfacientes inveniri possunt, ponendo $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$, & pro $P$ capiendo Functionem quamcunque sinus & cosinus anguli $ACM = \varphi$.

422. Sin autem ejusmodi Curvæ requirantur, in quibus sit $CM^4 + CN^4 = a^4$, tum poni debebit $P^4 = 4P^2Q + 2QQ = a^4$; quæ æquatio, cum nulla insit irrationalitas, nullam involvit contradictionem. Debebit ergo esse $Q = PP + \surd(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)$, quæ Functio, non obstante signo radicali, tanquam uniformis spectari potest, quia si $\surd(\frac{1}{2}P^4 + \frac{1}{2}a^4)$ sumeretur negative, pro $z$ valores imaginarii resultarent. Erit ergo $\frac{Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} + \surd(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4)$; &, cum pro Curva sit $L - M + N = 0$, seu $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{Nzz}{L} = 0$, erit $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{MMzz}{LL} + \surd(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4) = 0$. Consequenter, sublata irrationalitate, erit

$$\frac{z^4}{L^4}(LL - LM + MM)^2 = \frac{M^4 z^4}{2L^4} + \frac{1}{2}a^4,$$ CAP. XVII.

seu

$$(xx + yy)^2 (2(LL - LM + MM)^2 - M^4) = a^4 L^4,$$

quæ omnes Curvas ſatisfacientes in ſe complectitur.

423. Alio faciliori modo, uti ſupra §. 372, hæc & ſimiles quæſtiones reſolvi poterunt. Cum enim ſit $CM \,.\, CN = Q$, ſi altera ipſarum $CM$ & $CN$ dicatur $= z$, erit altera $= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$, ob $Q = \frac{Nzz}{L}$. Quare, ſi debeat eſſe $CM^n + CN^n = a^n$; fiet $z^n + \frac{N^n z^n}{L^n} = a^n$; ideoque $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$: quæ æquatio, ſi fuerit $n$ numerus par, jam eſt rationalis quæſitoque ſatisfaciet. At, ſi ſit $n$ numerus impar, ad irrationalitatem tollendam quadrata ſumi debent; quo fit, ut numerus interſectionum duplicetur, ſicque Curva oriatur non eo ſenſu ſatisfaciens uti deſideratur. Sic, ſi debeat eſſe $CM^2 + CN^2 = a^2$, fiet $zz = xx + yy = \frac{aaLL}{LL + NN}$; quæ convenit cum ſupra inventa $xx + yy = \frac{aaLL}{(L - M)^2 + L^2}$ (410), ob $L - M + N = 0$. Generaliter ergo, ſi debeat eſſe $CM^n + CN^n = a^n$ fueritque $n$ numerus par, obtinebitur iſta æquatio $z^n = (xx + yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n} = \frac{a^n L^n}{L^n + (L - M)^n}$, exiſtentibus $L$ Functione $m + 2$ dimenſionum, $M$ Functione $m + 1$ dimenſionum, & $N$ Functione $m$ dimenſionum ipſarum $x$ & $y$.

424. Hæc eadem ſolutio etiam ex conſideratione ſummæ $CM + CN = P$, eruitur. Si enim altera ipſarum $CM$ &

LIB. II. $CN$ ponatur $= z$, erit altera $= P - z$. Hinc, si $CM^n + CN^n$ debeat esse constans, erit $z^n + (P - z)^n = a^n$. Vidimus autem esse debere $P = \frac{Mz}{L}$, & $Q = \frac{Nz}{L}$; ita ut sit $L - M + N = 0$; ex quo erit $z^n + \frac{z^n(M-L)^n}{L^n} = a^n$; seu $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + (M-L)^n}$, vel $z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$: vel, eliminando $L$, erit $z^n = \frac{a^n (M-N)^n}{(M-N)^n + N^n}$. Hæ æquationes, si fuerit $n$ numerus par, conditionem propositam adæquate adimplent. At, si $n$ sit numerus impar, dabuntur quidem duæ intersectiones $M$ & $N$, ut sit $CM^n + CN^n = a^n$; at præter has habebuntur duæ aliæ intersectiones eadem proprietate gaudentes, ita ut quælibet recta per $C$ ducta bis proprietatem propositam involvat.

425. His expositis, facile erit quæstiones alias maxime difficiles resolvere: debeat enim Curva inveniri quæ ab omnibus rectis per $C$ ductis ita in duobus punctis $M$ & $N$ secetur, ut sit $CM^n + CN^n + \alpha CM . CN (CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \beta . CM^2 . CN^2 (CM^{n-4} + CN^{n-4})$ &c. quantitas constans $= a^n$. Ponatur alter valor $CM = z$, erit alter $CN = \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$; quibus valoribus substitutis orietur ista æquatio, qua natura Curvæ exprimitur, $z^n (L^n + N^n + \alpha LN (L^{n-2} + N^{n-2}) + \beta L^2 N^2 (L^{n-4} + N^{n-4}) + \&c.)$

$= a^n L^n$. Est autem $L - M + N = 0$, atque $L$, $M$, & $N$ sunt Functiones homogeneæ ipsarum $x$ & $y$ dimensionum $m + 2$, $m + 1$ & $m$, uti supra descripsimus: unde erit, vel $L = M - N$, vel $N = M - L$ sicque infinitæ solutiones hinc deducentur.

426. Pergamus jam ad Curvas investigandas, quæ a singulis rectis per punctum fixum $C$ ductis in tribus punctis secentur. Hujusmodi ergo Curvarum natura exprimetur hac æquatione generali

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0:$$

ubi $z$ denotat distantiam cujusque Curvæ puncti a $C$; & $P$, $Q$, $R$ sunt Functiones anguli $ACM = \varphi$, ejusve sinus & cosinus. Per easdem autem rationes quas supra allegavimus apparet, ne plures quam tres intersectiones prodeant, $P$ & $R$ esse debere Functiones impares ipsius $fin.\ \varphi$ & $cof.\ \varphi$; verum $Q$ statui debere Functionem parem. Quod si ergo ponantur Coordinatæ orthogonales $CP = x$, $PM = y$, ut sit $xx + yy = zz$, atque denotent $K$, $L$, $M$, & $N$ Functiones homogeneas $(n + 3)$, $(n + 2)$, $(n + 1)$ & $n$ dimensionum ipsarum $x$ & $y$, fore $P = \frac{Lz}{K}$, $Q = \frac{Mzz}{K}$, & $R = \frac{Nz^3}{K}$: ideoque inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$ habebitur pro hujusmodi Curvis ista æquatio generalis

$$K - L + M - N = 0;$$

ex qua patet punctum $C$ fore Curvæ punctum totuplex quot ndex $n$ contineat unitates.

427. Primum ergo, huc pertinent omnes Lineæ tertii ordinis, ubicunque punctum $C$ extra Curvam capiatur. Deinde, in hac æquatione continentur omnes Lineæ quarti ordinis, dummodo punctum $C$ in ipsa Curva accipiatur. Tertio, omnes Lineæ quinti ordinis, in quibus datur punctum duplex huc referuntur, si modo punctum $C$ in earum puncto duplici conf-

LIB. II. tituatur. Similique modo Lineæ altiorum ordinum hanc conditionem implebunt, si habeantur puncta multiplicia tanti exponentis, quot $n$ contineat unitates, si $n + 3$ exponat ordinem, ad quem æquatio pertineat.

428. Sint $p$, $q$, $r$ tres illi valores ipsius $z$, quos obtinet ex æquatione $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$, pro quovis valore anguli $CAM = \varphi$; eritque, ex natura æquationum $P = p + q + r$; $Q = pq + pr + qr$ & $R = pqr$. Cum jam $P$ & $R$ per $x$ & $y$ rationaliter exprimi nequeant, manifestum est ejusmodi Curvas exhiberi non posse, in quibus sit vel $p + q + r$ vel $pqr$ quantitas constans, neque adeo ulla Functio impar ipsarum $p$, $q$, & $r$, constanti æqualis poni poterit. Pares autem Functiones sine ulla difficultate constantem valorem obtinere poterunt. Sic, si requiratur ut sit $pq + pr + qr = aa$, erit $Q = \frac{Mzz}{K} = aa$: ideoque $M(xx + yy) = aaK$; qui valor in æquatione $K - L + M - N = 0$, substitutus, dabit æquationem generalem omnes Curvas hac proprietate præditas in se complectentem:

$$M(xx + yy) - aaL + aaM - aaN = 0;$$

vel, eliminando $M$, hanc

$$(xx + yy)K - (xx + yy)L + aaK - (xx + yy)N = 0.$$

429. Pari modo, aliæ similes quæstiones facile resolventur. Uti, quæratur Curva, quæ a rectis per $C$ ductis ita in tribus punctis secetur, ut sit $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$. Cum enim sit $p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$ & $P = \frac{Lz}{K}$ atque $Q = \frac{Mzz}{K}$, fiet $\frac{L^2 z^2}{K^2} - \frac{2Mzz}{K} = aa$, seu $(xx + yy) - L^2 - 2(xx + yy)KM = aaKK$. At, pro Curvis tres intersectiones admittentibus habetur hæc æquatio generalis $K - L + M - N = 0$, cujus natura in hoc consistit ut maximus ipsarum $x$ & $y$ dimensionum numerus

numerus ternario ſuperet minimum. Quo igitur hujuſmodi obtineatur æquatio, ſimulque ſit $(xx+yy)L^2 - 2(xx+yy)KM = aaKK$, multiplicetur illa æquatio per $2(xx+yy)K$, ut eliminari poſſit $M$, atque prodibit hæc æquatio generalis caſui propoſito ſatisfaciens CAP. XVII.

$$2(xx+yy)KK - 2(xx+yy)KL + (xx+yy)L^3 - aaKK - 2(xx+yy)KN = 0.$$

Membrum enim, in quo plurimæ inſunt dimenſiones, eſt $2(xx+yy)KK$, continetque $2n+8$ dimenſiones ipſarum $x$ & $y$; atque membrum infimum eſt $2(xx+yy)KN$, & continet $2n+5$ dimenſiones, uti natura rei poſtulat.

430. Quoniam ergo neque ſummum neque imum membrum evaneſcere poteſt, ponamus, ad Curvam ſimpliciſſimam inveniendam, $n=0$; ſitque $N=b^3$, $K=x(xx+yy)$, & $L=0$, atque prodibit hæc æquatio

$$2(xx+yy)^3x^2 - aaxx(xx+yy)^2 - 2b^3x(xx+yy)^2 = 0,$$

quæ per $2x(xx+yy)^2$ diviſa præbet hanç

$$x(xx+yy) - \frac{1}{2}aax - b^3 = 0,$$

quæ pertinet ad ordinem tertium. Sin autem non ſit $L=0$, ſed $L=2c(xx+yy)$, prodibit æquatio ordinis quarti

$$xx(xx+yy) - 2cx(xx+yy) + 2cc(xx+yy) - \frac{1}{2}aaxx - b^3x = 0,$$

ſeu

$$xx(xx+yy) + (2c-x)^2(xx+yy) = aaxx + 2b^3x.$$

Simili autem modo ex altioribus ordinibus plurimæ aliæ Curvæ quæſtioni ſatisfacientes eruentur.

431. Deinde, etiam Curvæ inveniri poterunt eæ in quibus ſit $p^4+q^4+r^4$ quantitas conſtans. Cum enim ſit $p^4+q^4+r^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$, poni debebit $P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR = c^4$.

Erit ergo

$$z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2 + 4K^3LN) = c^4K^4:$$

ideoque

$$4K^3LNz^4 = c^4K^4 - z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2),$$

LIB. II. unde valor ipsius $N$ in æquatione $K - L + M - N = 0$; substitutus dabit æquationem generalem pro Curvis huic conditioni satisfacientibus.

432. Poterit autem simul & huic conditioni $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$, & præcedenti $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$ satisfieri. Per hanc enim esse debet $zzL^2 - 2zzKM = aaKK$; unde fit $2zzKM = zzL^2 - aaKK$.

Deinde, cum sit

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - L^4z^4 + 4KL^2Mz^4 - 2K^2M^2z^4$$

erit

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 + L^4z^4 - 2aaK^2L^2z^2 - 2K^2M^2z^4$$

&

$$4K^2LMz^4 = 2KL^3z^4 - 2aaK^3Lzz.$$

Substituantur hi valores loco $M$ & $N$ in æquatione $K - L + M - N = 0$, seu $4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 4K^2LMz^4 - 4K^2LNz^4 = 0$, atque prodibit hæc æquatio pro Curva

$$4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 2KL^3z^4 - 2a^2K^3Lzz - c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2zz + 2K^2M^2z^4 = 0.$$

At, ob

$$KMzz = \tfrac{1}{2}L^2zz - \tfrac{1}{2}aaKK$$

erit

$$2K^2M^2z^4 = \tfrac{1}{2}L^4z^4 - aaK^2L^2zz + \tfrac{1}{2}a^4K^4;$$

ideoque pro Curvis quæsitis habebitur hæc æquatio generalis

$$8K^3Lz^4 - 8K^2L^2z^4 + 4KL^3z^4 - 4a^2K^3Lzz - 2c^4K^4 - L^4z^4 + 2a^2K^2L^2zz + a^4K^4 = 0.$$

433. Quia $K$ debet esse Functio homogenea ipsarum $x$ & $y$ una dimensione altior quam $L$, Curva simplicissima in qua tres interfectiones exhibeant simul $p^2 + q^2 + r^2 = a^2$, & $p^4 + q^4 + r^4 = c^4$ prodibit, si ponatur $K = zz$, & $L = bx$; erit ergo

$$8bxz^6 - 8bbxxz^4 + 4b^3x^3z^2 - 4a^2bxz^4 - 2c^4z^4 - b^4x^4 + 2a^2b^2x^2z^2 + a^4z^4 = 0,$$

CAP. XVII.

quæ, ob $zz = xx + yy$, eſt rationalis præbetque Lineam ordinis ſeptimi, cujus $C$ eſt punctum quadruplex. Alia autem Linea ſeptimi ordinis ſatisfaciens obtinebitur, ſi ponatur $K = x$, & $L = b$; erit enim

$$8bx^3z^4 - 8bbxxz^4 + 4b^3xz^4 - 4aabx^3zz - 2c^4x^4 - b^4z^4 + 2aabbxxzz + a^4x^4 = 0,$$

ſeu

$$z^4 = \frac{4aabx^3zz - 2aabbxxzz + 2c^4x^4 - a^4x^4}{8bx^3 - 8bbxx + 4b^3x - b^4}.$$

Unde fit

$$zz = \frac{2aabx^3 - aabbxx \pm xx\sqrt{(2bx-bb)(2c^4(bb-2bx+4xx)-2a^4(bb-2bx+2xx))}}{b(2x-b)(4xx-2bx+bb)}.$$

434. Jam ulterius progredi liceret ad Curvas, quæ a rectis per punctum $C$ ductis in quatuor punctis interſecentur; atque ex iis illæ inveniri poſſent, quæ datis proprietatibus ſint præditæ. Verum, ſi ad præcepta in præcedentibus tradita attendamus, nulla prorſus ſupererit difficultas, omniaque, quæ in hoc genere deſiderari poterunt, ſine nullo fere labore vel expedientur, vel, niſi quæſtio ſolutionem genuinam admittat, hoc ipſum ſtatim cognoſcetur. Quam ob rem huic materiæ amplius non immorabor, ad aliud argumentum ad cognitionem Linearum curvarum pertinens progreſſurus.

## CAPUT XVIII.

### *De Similitudine & Affinitate Linearum curvarum.*

435. In omni æquatione pro Linea curva, præter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$, inesse debent quantitates constantes, vel una vel plures, uti $a$, $b$, $c$, &c.; quibus Lineæ constantes designantur, & quæ cum variabilibus $x$ & $y$ ubique eundem Linearum dimensionum numerum, constituunt: Si enim in uno termino extet productum ex $n$ Lineis in se invicem multiplicatis, necesse est ut in singulis reliquis terminis totidem Lineæ in se invicem multiplicentur, quoniam alias quantitates heterogeneæ inter se comparari deberent, quod fieri non potest. Quocirca in omni æquatione pro Linea curva Lineæ constantes $a$, $b$, $c$, &c., cum variabilibus $x$ & $y$ ubique eundem dimensionum numerum constituent, nisi forte Linea quæpiam constans unitate vel alio numero absoluto exprimatur. Hoc igitur notato, si nullæ Lineæ constantes in æquatione inessent, tum variabiles $x$ & $y$ solæ ubique eundem dimensionum numerum adimplerent, ideoque Functionem homogeneam constituerent. Supra autem jam vidimus hujusmodi æquationem ad Lineam curvam non pertinere, sed aliquot rectas se invicem in eodem puncto intersecantes exhibere.

436. Contemplemur igitur æquationem in qua, præter binas variabiles $x$ & $y$, unica insit Linea constans $a$; ita ut tres Lineæ $a$, $x$, & $y$ ubique in æquatione eundem dimensionum numerum constituant. Hujusmodi ergo æquatio, prout Lineæ constanti $a$ alii atque alii valores tribuantur, infinitas producet Lineas curvas, quæ tantum quantitate a se invicem discreparent, ceterum vero omnino similes inter se sint futuræ. Omnes ergo Lineæ curvæ, quæ hoc modo in eadem æquatione comprehenduntur, merito ad idem genus referuntur atque inter se

fimiles effe cenfentur, neque aliud in illis deprehendetur difcrimen, nifi quod in Circulis diverfæ magnitudinis ineffe intelligitur. CAP. XVIII.

437. Quo hæc fimilitudo melius percipiatur, confideremus æquationem determinatam, præter variabiles $x$ & $y$, unicam Lineam conftantem $a$, quam *Parametrum* vocare liceat, continentem; hanc

$$y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0.$$

Sit $AC$ valor Parametri $a$; atque, exiftente $AC = a$, fit $AMB$ Linea curva hac æquatione contenta, fumta recta $AB$ pro Axe, vocatifque Coordinatis $AP = x$ & $PM = y$. Tribuatur jam Parametro $a$ quicunque alius valor $ac = a$, fitque $amb$ Linea curva, quam nunc illa æquatio præbet, eruntque hæ Lineæ curvæ $AMB$ & $amb$ inter fe fimiles. Quod fi enim maneat $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$, atque fit $ac = \frac{1}{n} AC = \frac{a}{n}$; tum vero capiatur $ap = \frac{1}{n} AP = \frac{x}{n}$, erit $pm = \frac{1}{n} PM = \frac{y}{n}$; namque fi in illa æquatione, loco $a$, $x$, & $y$, fcribantur refpective $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$ & $\frac{y}{n}$, ob omnes terminos per $n^3$ divifos, eadem ipfa refultabit æquatio. TAB. XXI. Fig. 88. TAB. XXI. Fig. 89.

438. Curvæ ergo fimiles hanc habebunt proprietatem, ex qua fimilitudinis natura eo luculentius apparebit, ut fumtis Abfciffis $AP$, $ap$ in ratione Parametrorum $AC$ & $ac$ Applicatæ $PM$ & $pm$ fimul eandem habituræ fint rationem: fcilicet, fi fumatur $AP : ap = AC : ac$, tum quoque erit $PM : pm = AC : ac$. Cum ergo fit $AP : PM = ap : pm$, hæ Curvæ in fenfu geometrico inter fe erunt fimiles, atque, quantitate excepta, iifdem prorfus affectionibus gaudebunt. Sumtis nimirum Abfciffis $AP$, $ap$ homologis feu Parametris $AC$ & $ac$ proportionalibus, non folum Applicatæ $PM$ &

LIB. II. $pm$ rationem tenebunt Parametrorum sed etiam omnes aliæ Lineæ similiter ductæ, quin etiam Curvarum arcus $AM$ & $am$ erunt ut $AC$ & $ac$. Tum vero etiam Areæ similes $APM$ & $apm$ erunt in ratione duplicata, seu ut $AC^2$ ad $ac^2$. Atque, si sumantur duo puncta homologa $O$ & $o$ quæcunque, ita ut sit $AO : ao = AC : ac$, ex iisque sub æqualibus angulis $AOM$, $aom$ ad Curvas rectæ ducantur $OM$ & $om$, erit quoque $OM : om = AC : ac$. Ob similitudinem denique etiam Tangentes in punctis homologis $M$ & $m$ ad Axem æqualiter inclinabuntur, atque adeo radii osculi ibidem tenebunt rationem Parametrorum $AC$ & $ac$.

439. Hinc patet omnes Circulos esse figuras similes, quæ continentur æquatione $yy = 2ax - xx$; parique modo omnes Curvæ æquatione $yy = ax$ contentæ, hoc est omnes Parabolæ, erunt inter se figuræ similes. Ex hujusmodi autem æquationibus, quibus Curvas similes contineri vidimus, quia Coordinatæ $x$ & $y$ cum Parametro $a$ ubique eundem constituunt dimensionum numerum; si valor ipsius $y$ definiatur, reperietur is æqualis Functioni homogeneæ unius dimensionis ipsarum $a$ & $x$. Vicissim ergo, si denotet $P$ Functionem homogeneam unius dimensionis ipsarum $a$ & $x$, æquatio $y = P$ innumerabiles continebit Curvas similes, quæ oriuntur, si Parametro $a$ successive alii atque alii valores tribuantur. Simili autem modo ex hujusmodi æquatione pro Curvis similibus Abscissa $x$ æquabitur Functioni unius dimensionis ipsarum $a$ & $y$, atque ipsa Parameter $a$ æqualis erit Functioni unius dimensionis ipsarum $x$ & $y$.

440. Data autem Curva quacunque $AMB$, infinitæ aliæ ipsi similes $amb$ per facilem praxin describi possunt. Sumatur enim ratio quæcunque, quam latera homologa Curvæ datæ & describendæ inter se tenere debeant, quæ sit $1 : n$; atque, si Curva data $AMB$ referatur ad Axem $AB$ per Coordinatas normales $AP$ & $PM$, super Axe simili $ab$ capiatur Abscissa $ap$, ut sit $AP : ap = 1 : n$, & ex $p$ erigatur Applicata normalis $pm$, ut sit pariter $PM : pm = 1 : n$, eritque punctum $m$ in

Curva simili $a\ m\ b$, ita ut puncta $M$ & $m$ sint homologa. Vel, descriptio quoque ex puncto quocunque fixo $O$ absolvi poterit; sumto enim in Curva describenda puncto simili fixo $o$, fiat perpetuo angulus $a\ o\ m$ æqualis angulo $A\ O\ M$, & abscindatur $o\ m$, ut sit $O\ M : o\ m = 1 : n$, eritque punctum $m$ pariter in Curva simili $a\ m\ b$. Hoc itaque modo, pro quamvis ratione $1 : n$ ad arbitrium assumta, Curva similis describi poterit. Solent autem in hunc finem confici instrumenta mechanica, quorum ope figuræ cujuscunque magnitudinis, quæ sint natæ similes, delineari possunt.

441. Quod si igitur natura Curvæ propositæ $AM$ exprimatur æquatione quacunque inter Coordinatas $AP = x$, & $PM = y$, inde facili negotio reperietur æquatio pro Curva simili $am$. Sit enim Abscissa homologa $ap = X$ & Applicata $pm = Y$; erit ex constructione $x : X = 1 : n$ & $y : Y = 1 : n$; unde fit $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Hi ergo valores in æquatione in $x$ & $y$ data substituti producent æquationem inter $X$ & $Y$ pro Curvis similibus. Si igitur in hac nova æquatione solæ Coordinatæ $X$ & $Y$ cum littera $n$ dimensiones constituere censeantur, numerus dimensionum ubique erit nullus; vel, si æquatio, ad fractiones tollendas, multiplicetur per quampiam potestatem ipsius $n$, orietur æquatio, in qua tres hæ quantitates $X$, $Y$, & $n$ ubique eundem dimensionum numerum producant. Supra autem vidimus in omni æquatione pro Curvis similibus ambas Coordinatas cum ea constante, cujus variatione Curvæ similes existunt, ubique eundem dimensionum numerum constituere; quod igitur est criterium æquationum Curvas similes continentium.

442. Quemadmodum in Curvis similibus Abscissæ & Applicatæ homologæ in eadem ratione sive augentur sive diminuuntur; ita, si Abscissæ aliam sequantur rationem, aliam vero Applicatæ, Curvæ non amplius orientur similes. Verum tamen, quia Curvæ hoc modo ortæ inter se quandam Affinitatem tenent, has Curvas *affines* vocabimus: complectitur ergo

LIB. II. Affinitas sub se similitudinem tanquam speciem: quippe Curvæ affines in similes abeunt, si ambæ illæ rationes, quas Abscissæ & Applicatæ seorsim sequuntur, evadant æquales. Ex Curva ergo quacunque data $AMB$ innumerabiles Curvæ affines $amb$ reperientur hoc modo; sumatur Abscissa $ap$, ita ut sit $AP : ap = 1 : m$; tum constituatur Applicata $pm$, ut sit $PM : pm = 1 : n$; sicque, mutando harum rationum $1 : m$ & $1 : n$, vel alterutram vel utramque, innumerabiles prodibunt Curvæ, quæ primæ $AMB$ erunt affines.

TAB. XXI. Fig. 88. & 89.

443. Exprimatur natura Curvæ datæ $AMB$ æquatione quacunque inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, & $PM = y$; atque in Curva affini $amb$ modo præcedente descripta ponatur Abscissa $ap = X$, & Applicata $pm = Y$, ob $x : X = 1 : m$, & $y : Y = 1 : n$, erit $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$. Quod si ergo hi valores in æquatione inter $x$ & $y$ data substituantur, proveniet æquatio generalis pro Curvis affinibus inter $X$ & $Y$. Ad hujus æquationis naturam penitius evolvendam, ponamus æquationem pro Curva data $AMB$ ita esse conformatam, ut Applicata $y$ æquetur Functioni cuicunque ipsius $x$, quæ sit $= P$, seu esse $y = P$. Si igitur in $P$ loco $x$ substituatur $\frac{X}{m}$, fiet $P$ Functio nullius dimensionis ipsarum $X$ & $m$; ideoque æquatio generalis pro Curvis Affinibus ita erit comparata, ut $\frac{Y}{n}$ æquetur Functioni nullius dimensionis ipsarum $X$ & $m$; seu, quod eodem redit, Functio nullius dimensionis ipsarum $Y$ & $n$ æquabitur Functioni nullius dimensionis ipsarum $X$ & $m$.

444. Discrimen autem inter Curvas similes & affines hoc potissimum est notandum, quod Curvæ, quæ sunt similes respectu unius Axis vel puncti fixi, eædem similes sint futuræ respectu aliorum quorumvis Axium seu punctorum homologorum. Curvæ autem, quæ tantum sunt affines, tales tantum sunt respectu eorum Axium, ad quos referuntur, neque pro lubitu alii Axes, seu puncta homologa, in ipsis dantur, ad

quæ

quæ affinitas referri poſſit. Ceterum vero, notandum eſt, uti omnes Curvæ ſimiles ad eundem ordinem, atque adeo ad idem Linearum Genus referuntur; ita etiam Curvas affines ſemper in eodem Linearum ordine eodemque genere comprehendi. Quæ ut clarius percipiantur, ſimilitudinem atque affinitatem nonnullis exemplis Curvarum notiorum illuſtraſſe conveniet.

445. Sit igitur Curva data Circulus ad Diametrum relatus, cujus natura exprimitur æquatione $yy = 2cx - xx$. Ponatur $x = \frac{X}{n}$ & $y = \frac{Y}{n}$, atque æquatio inter $X$ & $Y$ reſultans complectetur omnes Curvas ſimiles; erit autem $\frac{Y^2}{n^2} = \frac{2cX}{n} - \frac{XX}{nn}$, ſeu, $Y^2 = 2ncX - XX$; ex qua patet omnes Curvas Circulos ſimiles quoque eſſe Circulos, quorum Diametri $2nc$ utcunque diſcrepent. Ad Curvas autem Circulo affines inveniendas ponatur $x = \frac{X}{m}$ & $y = \frac{Y}{n}$, prodibitque $\frac{Y^2}{nn} = \frac{2cX}{m} - \frac{XX}{mm}$, ſeu $m^2 Y^2 = 2mn^2 cX - nn\, XX$, quæ eſt æquatio generalis pro Ellipſi ad alterum Axem principalem relata; unde intelligitur omnes Ellipſes eſſe Lineas curvas Circulo affines. Quare, omnes Ellipſes ſunt quoque Curvæ inter ſe affines. Simili autem modo intelligetur, omnes Hyperbolas eſſe Curvas inter ſe affines. Ellipſes autem, atque etiam Hyperbolæ, in quibus eadem ratio inter binos Axes principales intercedit, Curvæ erunt inter ſe ſimiles.

446. Quod ad Parabolam æquatione $yy = cx$ expreſſam attinet, perſpicuum quidem eſt omnes Curvas ipſi ſimiles quoque eſſe Parabolas, atque adeo omnes Parabolas eſſe Curvas inter ſe ſimiles. Quod ſi autem ad Curvas Parabolæ affines ſpectemus, poſito $y = \frac{Y}{n}$ & $x = \frac{X}{m}$, prodibit æquatio $Y^2 = \frac{n^2 c}{m} X$, quæ cum etiam ſit pro Parabolis, manifeſtum eſt,

 quæ Curvæ Parabolæ fint affines, eafdem fimul Parabolæ effe fimiles; ita ut hoc cafu fimilitudo æque late pateat atque affinitas. Idem quoque evenit in omnibus Curvis, quarum natura exprimitur æquatione duobus tantum terminis conftante, cujufmodi funt $y^3 = ccx$; $y^3 = cxx$; $y^2x = c^3$; &c.; his nimirum Curvis, cum parabolicis tum hyperbolicis, quæ aliæ Curvæ funt affines eædem quoque funt fimiles; quæ convenientia in Curvis alius generis non locum habet, uti jam de Circulo & Ellipfi notavimus.

447. Quemadmodum ex data æquatione inter $x$ & $y$, quam quotcunque quantitates conftantes $a$, $b$, $c$, &c. ingrediantur, fi fingulis conftantibus determinati valores tribuantur, unica Linea curva determinata oritur; ita, fi una conftantium, puta $a$ mutabilis affumatur, eique fucceffive alii atque alii valores tribuantur, quia ex unoquoque valore peculiaris Curva nafcitur, omnino infinitæ Curvæ orientur, quæ erunt fimiles fi, præter $a$, nullæ aliæ Lineæ conftantes æquationem ingrediantur; contra vero diffimiles. Sin autem, præter $a$, alia quoque conftans $b$ mutabilis ftatuatur; tum, ob mutabilitatem ipfius $b$, ex unoquoque ipfius $a$ valore emergent Lineæ curvæ infinitæ, ficque omnino ex mutabilitate duarum conftantium $a$ & $b$ infinities infinitæ provenient Lineæ curvæ differentes. Si infuper tertia conftans $c$ mutabilis affumatur, tum adhuc infinities plures refultabunt Lineæ curvæ; ficque quo major fuerit conftantium, quæ mutabiles ftatuuntur, numerus, eo majore infiniti poteftate numerus Curvarum refultantium exprimetur.

448. Confideremus autem aliquanto diligentius eas Lineas curvas infinitas, quæ ex una æquatione prodeunt, dum tantum una Linearum conftantium mutabilis affumitur. Hujufmodi autem æquatio, fi idem Axis idemque Abfciffarum initium retineatur, non folum Lineas illas curvas infinitas exhibet, fed etiam earum pofitionem indicat, ita ut his Curvis infinitis fpatium quodpiam impleatur, in quo nullum affignari queat punctum, quia per id aliqua infinitarum Curvarum tran-

feat. Prout ergo æquatio fuerit comparata, Curvæ illæ infinitæ vel erunt dissimiles vel similes, uti ex præcedentibus judicare licet; quin etiam evenire potest, ut omnes Curvæ sint inter se non solum similes sed etiam æquales, ratione situs tantum differentes. Sic ista æquatio $y = a + \sqrt{(2cx - xx)}$, posita $a$ mutabili, exhibebit infinitos Circulos æquales radii $= c$, quorum centra sunt in recta ad Axem normali sita. CAP. XVIII.

449. Hinc etiam vicissim, si una eademque Curva super plano in infinitis diversis sitibus secundum certam legem describatur, æquatio præberi poterit, qua per unius constantis mutabilitatem omnes hæ infinitæ Curvæ inter se æquales simul exhibeantur. Sit Curva infinitis variis sitibus exhibita Circulus cujus radius $= c$, qui ita infinities describatur, ut vertices $A$, $a$, datam Curvam $AaL$, quæ *Directrix* vocetur, constituant; Diametri autem $ab$ perpetuo Axi $AB$ maneant parallelæ. Ad æquationem ergo pro his infinitis Circulis inveniendam, sumatur quodvis Directricis punctum $a$, unde in Axem principalem demittatur perpendiculum, $aK$. Ponatur $AK = a$; &, ob Directricem datam, dabitur $Ka$ per $a$: sit ergo $Ka =$ A, eritque A Functio quæpiam ipsius $a$ data. Tum ex $a$ Axi principali ducatur parallela $ab$, quæ erit Diameter Circuli Verticem in Directricis puncto $a$ habentis, ex cujus puncto quovis $m$ ducatur Applicata $mP = y$, respondens Abscissæ $AP = x$; erit ergo $ap = x - a$, & $pm = y -$ A. Positis autem $ap = t$, & $pm = u$; erit, ex natura Circuli, $uu = 2ct - tt$; jam, ob $t = x - a$, & $u = y -$ A, habebitur $(y - \text{A})^2 = 2c(x - a) - (x - a)^2$, quæ erit æquatio generalis omnes Circulos secundum Directricem $AaL$ modo descripto dispositos complectens. Omnes scilicet isti Circuli ex æquatione inventa prodibunt, si Linea $a$, a qua simul A pendet, mutabilis assumatur. TAB. XXII. *Fig.* 90.

450. Simili modo si, loco Circuli, alia quæcunque Linea Curva $amb$ ita promoveatur secundum ductum Directricis $AaL$, ut ejus Vertex seu Abscissarum initium $a$ in Directrice, atque Axis $ab$ sibi perpetuo parallelus maneat, eadem Linea

Hh 2

 curva infinities descripta habebitur, atque æquatio inveniri poterit, qua omnium harum Linearum curvarum natura simul comprehendatur. Data sit natura hujus Curvæ promotæ per æquationem inter Coordinatas $ap = t$ & $pm = u$; ac, pro Axe principali, ad quem omnes Curvæ junctim consideratæ referantur sumatur recta $AB$ Axibus $ab$ parallela, quæ simul sit Axis Directricis $A\,a\,L$. Posito jam, ut ante $AK = a$, & $Ka = \mathrm{A}$, ita ut A sit Functio quædam ipsius $a$, vocetur Abscissa $AP = x$, & Applicata $Pm = y$, erit $t = x - a$, & $u = y - \mathrm{A}$. Quod si ergo hi valores loco $t$ & $u$ in æquatione inter $t$ & $u$ data substituantur, obtinebitur æquatio generalis omnes Curvas $a\,m\,b$ conjunctim complectens. Quicunque enim valor determinatus ipsi $a$ tribuatur, prodibit una quædam Curva $a\,m\,b$ ex infinitis quæ per hunc motum sunt descriptæ. Sic, si Curva $a\,m\,b$ fuerit Parabola æquatione $uu = ct$ expressa, tum infinitæ Parabolæ æquales, quarum Vertices per Directricem $A\,a\,L$ sunt dispositi, Axesque rectæ $A\,B$ paralleli, continebuntur in hac æquatione $(y - \mathrm{A})^2 = c(x - a)$.

451. Quemadmodum hic Verticem Curvæ $A$ in data Curva Directrice ita promoveri posuimus, ut ejus Axis sibi semper maneret parallelus; ita etiam, dum Vertex per datam Curvam transfertur, positio Axis Curvæ $a\,b$ utcunque variari poterit; sicque multo generalior obtinebitur æquatio pro eadem Curva in dato plano secundum quamcunque legem infinities descripta. Quod quo clarius expediamus, ponamus primum Verticem Curvæ $A$ per circumferentiam $A\,a$ ita progredi, ut Axis Curvæ $a\,b$ perpetuo ad Centrum Circuli $O$ dirigatur. Motus igitur rotatorius Curvæ $AMB$ cum Axe $B\,A\,O$ circa punctum $O$ factus exhibebit omnes istos infinitos ejusdem Curvæ $AMB$ situs diversos quos omnes in una æquatione, quam constans quæpiam mutabilis posita ingrediatur, complecti oportet.

Tab. XXII. Fig. 91.

452. Statuatur radius invariabilis $AO = aO = c$; sitque angulus $AOa = \alpha$, qui mutabilis assumitur: ex Curvæ in situ

quocunque $a m b$ descriptæ puncto quovis $m$ ad rectam $O A B$ pro Axe principali assumtam demittatur Applicata $m P$, sitque $O P = x$, & $P m = y$. Tum ex $m$ in proprium Curvæ $amb$ Axem $a b$ demittatur quoque perpendicularis $m p$ : vocatisque $a p = t$, & $p m = u$, dabitur æquatio invariabilis inter $t$ & $u$, qua natura Curvæ $a m b$ exprimitur. Ex $P$ ducatur $P s$ ipsi $O b$ parallela, cui Applicata $m p$ producta occurrat in $s$; eritque $p s = x. \sin. \alpha$; $O p - P s = x. \cos. \alpha$; tum vero, ob angulum $P m s = A O a = \alpha$; erit $P s = y. \sin. \alpha$ & $m s = y \cos. \alpha$. Hinc erit $O p = c + t = x. \cos. \alpha + y. \sin. \alpha$ & $m p = u = y. \cos. \alpha - x. \sin. \alpha$ In æquatione ergo inter $t$ & $u$ data substituantur $t = x. \cos. \alpha + y. \sin. \alpha - c$ & $u = y. \cos. \alpha - x. \sin. \alpha$; prodibitque æquatio generalis inter Coordinatas $x$ & $y$, quæ, angulo $\alpha$ mutabili assumto, omnes Curvas $a m b$ in se complectetur.

453. Promoveatur nunc autem Vertex Curvæ $A M B$ secundum Directricem quamcunque $A a L$, interea vero positio Axis $a b$ continuo ita mutetur, ut angulus $A O a$ quomodocunque pendeat a puncto $a$. Scilicet, Vertice in $a$ versante, sit $A K = a$, & $K a = A$, atque angulus $A O a = \alpha$; ubi, ob Directricem datam, erit $A$ Functio quædam cognita ipsius $a$ : anguli $\alpha$ autem sinus cosinusve sit pariter Functio quæpiam ipsius $a$. His positis, erit $K O = \frac{A}{tang. \alpha}$, & $O a = \frac{A}{\sin. \alpha}$. Ex Curvæ $a m b$ puncto quocunque $m$ primum ad Axem principalem $A O$ demittatur perpendiculum $m P$, tum vero etiam in proprium Axem $m p$, sitque $A P = x$, $P m = y$; & $a p = t$, $p m = u$, dabiturque æquatio invariabilis inter Coordinatas $t$ & $u$, ex qua æquatio variabilis inter $x$ & $y$ omnes Curvas $a m b$ complectens definiri debet. TAB. XXII. Fig. 92.

454. Ad hoc præstandum ex $P$ in $m p$ productam ducatur normalis $P s$, quæ erit Axi Curvæ $a b O$ parallela : atque, ob angulum $P m s = A O a = \alpha$, erit $P s = y. \sin. \alpha$ & $m s =$

LIB. II. $y. \cos. \alpha$. Deinde, ob $OP = a + \frac{A}{\tang. \alpha} - x$, erit $ps = a. \sin. \alpha + A. \cos. \alpha - x. \sin. \alpha$, & $Qp - Ps = a. \cos. \alpha + \frac{A. \cos. \alpha}{\tang. \alpha} - x. \cos. \alpha$. Hinc erit $Op = a \cos. \alpha + \frac{A. \cos. \alpha}{\tang. \alpha} - x. \cos. \alpha + y. \sin. \alpha = \frac{A}{\sin. \alpha} - t$; ideoque $t = A. \sin. \alpha - a. \cos \alpha + x. \cos. \alpha - y. \sin. \alpha$, & $u = - a. \sin. \alpha - A. \cos. \alpha + x. \sin. \alpha + y. \cos. \alpha$. Quam ob rem, si in æquatione inter $t$ & $u$ data substituantur,

$$t = (x - a). \cos. \alpha - (y - A). \sin. \alpha$$
&
$$u = (x - a). \sin. \alpha + (y - A). \cos. \alpha$$

orietur æquatio quæsita inter $x$ & $y$. Quacunque ergo lege eadem Curva $a m b$ in plano infinities describatur, hoc modo invenietur æquatio generalis istas Curva omnes simul in se continens.

455. Hoc igitur modo in æquationem includuntur Curvæ numero infinitæ eædem, tantum ratione situs a se invicem discrepantes; si quidem æquatio, quæ inter $t$ & $u$ datur, fuerit invariabilis, neque constantem mutabilem $a$ in se contineat. Quod si autem una pluresve constantes, quæ in æquatione inter $t$ & $u$ insunt, simul ab $a$ pendere assumantur, tum obtinebuntur infinitæ Curvæ diversæ, sive similes sive dissimiles, eadem pariter æquatione contentæ: Similes scilicet erunt omnes Curvæ, si æquatio inter $t$ & $u$ ita fuerit comparata ut $u$ æquetur Functioni cuicunque homogeneæ unius dimensionis ipsarum $t$ & $f$, existente $f$ quantitate utcunque ab $a$ pendente; sin secus accidat, Curvæ erunt dissimiles.

TAB. XXII. Fig. 93. 456. Ut hoc argumentum Curvarum diversarum exemplo illustremus, ponamus infinitos describi Circulos $AB$, $\alpha B$, $a m B$ per datum punctum $B$ transeuntes, qui omnes Centra sua habeant sita in recta $AE$, cujusmodi Circulis in mappis geographicis meridiani repræsentari solent. Demittatur ex $B$

perpendiculum in rectam $AC$, sitque $BC = c$, quod intervallum est invariabile. Tum consideretur Circulus infinitorum descriptorum quicunque $amB$; unde una demissa Applicata $mP$, fit $CP = x$, & $Pm = y$, radius porro hujus Circuli, qui, etsi respectu ejusdem Circuli est constans, tamen respectu omnium est mutabilis, ponatur $aE = BE = a$: erit $CE = \sqrt{(aa - cc)}$ & $PE = x + \sqrt{(aa - cc)}$. Cum igitur sit $PE^2 + Pm^2 = aa$, erit $y^2 + x^2 + 2x\sqrt{(aa - cc)} + aa - cc = aa$; seu $yy = cc - 2x\sqrt{(aa - cc)} - xx$: si autem intervallum $CE$ loco constantis variabilis in æquationem introducatur, ponaturque $CE = a$, habebitur hæc æquatio aliquanto simplicior $yy = cc - 2ax - xx$, quæ, ob mutabilitatem ipsius $a$, omnes omnino Circulos per $B$ ductos & Centra in recta $AE$ habentes exhibebit. Simili vero modo Curvæ quæcunque infinitæ certa quadam lege dispositæ ad unam æquationem revocabuntur, dummodo discrimen inter constantes variabiles & invariabiles probe observetur. CAP. XVIII.

## CAPUT XIX.

### *De intersectione Curvarum.*

457. QUEMADMODUM Lineæ curvæ a rectis intersecentur, in præcedentibus Capitibus jam sæpius vidimus, ubi ostendimus Lineas secundi ordinis a rectis in pluribus quam duobus punctis secari non posse, Lineas autem tertii ordinis plures quam tres intersectiones, & quarti ordinis plures quam quatuor & ita porro non admittere. Cum igitur in hoc Capite constituerim intersectiones, quas duæ quævis Curvæ inter se faciunt, definire, oportebit hanc tractationem a Lineis rectis inchoare, atque ipsa illa puncta indagare, in quibus recta quæpiam data Curvam datam trajicit. Hoc enim modo via parabitur ad intersectiones mutuas Linearum curva-

LIB. II. rum determinandas, quod argumentum maximum usum habere solet in construendis æquationibus altiorum graduum, qua de re in sequenti Capite fusius tractabo.

TAB. XIII. Fig. 94. 458. Sit igitur proposita Curva quæcunque $AMm$, cujus natura data sit per æquationem inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, $PM = y$. Ducatur jam recta quæcunque $BMm$, quæ quot & quibusque in punctis secatura sit Curvam $AMm$ definiri oporteat. Ad hoc quæratur æquatio pro Linea recta pariter inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$ ad eundem Axem $AP$ idemque Abscissarum initium $A$ relata. Æquatio ergo pro Linea recta erit hujusmodi $\alpha x + \beta y = \gamma$; qua indicatur, posito $x = 0$, fore $y = AD = \frac{\gamma}{\beta}$, posito autem $y = 0$, fore $x = -AB = \frac{\gamma}{\alpha}$; unde, concursus $B$ hujus rectæ cum Axe, pariterque angulus ad $B$, cujus tangens est $= \frac{AD}{AB} = \frac{-\alpha}{\beta}$, innotescit. Sic igitur tam Curva quam Recta proposita per æquationes inter communes Coordinatas $x$ & $y$ exprimuntur.

459. Quod si in utraque æquatione Abscissas $x$ perpetuo æquales assumamus, Applicatæ $y$, si sint diversæ, ostendent, quantum Curvæ & rectæ puncta eidem Abscissæ respondentia a se invicem distent. Si igitur ex utraque æquatione æqualis prodeat valor Applicatæ $y$, tum ibi Curva & recta commune habebunt punctum, ideoque eo in loco dabitur intersectio. Ad intersectiones ergo inveniendas in utraque æquatione, præter Abscissas $x$, quoque Applicatæ $y$ æquales sunt constituendæ; sicque habebuntur duæ æquationes duas quantitates incognitas $x$ & $y$ evolventes, ex quarum resolutione vel Abscissæ $x$, quibus intersectiones respondent, vel Applicatæ $y$ reperientur. Scilicet, si ex istis duabus æquationibus eliminetur incognita $y$, æquatio nascetur solam incognitam $x$ complectens, cujus valores exhibebunt Abscissas $AP$, $Ap$ unde Applicatæ $PM$, $pm$ eductæ per intersectionum puncta $M$ & $m$ transibunt.

460.

460. Cum æquatio pro recta $BMm$ sit $\alpha x + \beta y = \gamma$, ex ea fiet $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$; qui valor si in æquatione pro Curva loco $y$ substituatur, orietur æquatio tantum $x$ continens, cujus radices reales præbebunt omnes Abscissas, quibus intersectiones respondent; ideoque intersectionum numerus colligetur ex numero radicum realium ipsius $x$, quas æquatio inventa suppeditat. Quoniam vero in valore ipsius $y = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}$, incognita $x$ unicam tenet dimensionem, post substitutionem emerget æquatio, in qua $x$ non plures habebit dimensiones, quam antea in æquatione pro Curva ambæ $x$ & $y$ conjunctim tenuerant. Habebit ergo $x$ vel totidem dimensiones vel pauciores, si quidem per substitutionem summæ ipsius $x$ potestates tollantur. CAP. XIX.

461. Inventis hoc modo Abscissis $AP$, $Ap$, quæ intersectionibus respondent, ex iis ipsa intersectionum puncta $M$ & $m$ facile definientur. Cum enim Applicatæ in punctis $P$ & $p$ erectæ per intersectiones transeant, ea tantum puncta erunt notanda, ubi hæ Applicatæ rectam $BMm$ secant. Notari quoque possent puncta, quibus istæ Applicatæ Curvæ $AMm$ occurrunt; cum autem sæpenumero una Applicata Curvæ in pluribus punctis occurrat, incertum foret quodnam Curvæ punctum simul intersectionem sit præbiturum. Hoc autem incommodum usu non venit, si intersectiones ex recta $BMm$ æstimentur; quippe a qua unaquæque Applicata non nisi in unico puncto secari potest. Quod si autem eveniat, ut duo ipsius $x$ valores fiant inter se æquales, tum duo intersectionum puncta $M$ & $m$ in unum coalescent; quo ergo casu vel recta $BM$ Curvam tanget, vel eam in puncto duplici secabit.

462. Si, eliminata incognita $y$, æquatio resultans qua $x$ definitur, nullam habeat radicem realem, tum hoc erit indicium Curvam nusquam a recta $BMm$ secari vel tangi; radices autem reales (quotquot fuerint) illius æquationis ostendent totidem intersectiones; quia unicuique Abscissæ reali una rectæ $BMm$ Applicata realis respondet; cui cum sit æqualis Ap-

LIB. II. plicata Curvæ, fieri non poteſt, quin ibi nulla exiſtat interſectio. Hæc ideo iſto loco probe ſunt notanda, quod in interſectione Linearum curvarum non ſemper ſingulæ radices totidem interſectiones indicent; cujus ratio mox fiet manifeſta, cum duas Lineas curvas contemplabimur, earumque interſectiones inveſtigabimus.

TAB. XXIII. Fig. 95. 463. Sint igitur deſcriptæ duæ Curvæ quæcunque $MEm$, $MFm$, quæ ſe mutuo interſecent; ad quarum inteſerſectiones definiendas, natura utriuſque exprimatur per æquationem inter Coordinatas orthogonales $x$ & $y$ ad eundem communem Axem $AB$ idemque Abſciſſarum initium $A$ relatas. Sumtis ergo pro utraque Curva Abſciſſis $x$ æqualibus, ubi dantur interſectiones, ibidem Applicatæ $y$ convenient. Quocirca, ſi ex duabus Curvarum æquationibus propoſitis, eliminando $y$, formetur nova æquatio ſolam $x$ tanquam incognitam involvens, interſectiones omnes $M$, $m$, $m$, quotquot fuerint, indicabuntur per radices reales iſtius æquationis; ſcilicet, Abſciſſæ $AP$, $Ap$, $Ap$, &c. quæ interſectionibus $M$, $m$, $m$, &c. reſpondent, erunt valores ipſius $x$ convenientes pro illa æquatione.

464. Inventis autem Abſciſſis his $AP$, $Ap$ &c., quæ interſectionibus conveniunt, non tam facile erit ipſa interſectionum puncta definire. Si enim pro utraque Curva eidem Abſciſſæ $AP$ plures Applicatæ reſpondeant, quod evenit, ſi pro utraque Curva fuerit $y$ Functio multiformis ipſius $x$, tum ex hac duplici Applicatarum multitudine eas, quæ ſint inter ſe æquales, eligi oportet: quæ inveſtigatio eo erit moleſtior, quo plures valores Applicata $y$ in utraque Curva obtineat. Huic tamen difficultati facile occurretur, ſi, dum ex binis æquationibus propoſitis Applicata $y$ eliminatur, ea æquatio in ſubſidium vocetur, qua $y$ per $x$ definitur; ex hac enim æquatione pro quovis ipſius $x$ valore invento cognoſcetur magnitudo Applicatæ ex puncto $P$ ad interſectionem uſque pertingentis; neque ad hoc opus erit, naturam alterutrius vel adeo utriuſque Curvæ perpendiſſe.

465. Sit una Curva Parabola, cujus natura hac exprimatur æquatione $yy - 2xy + xx - 2ax = 0$; altera vero sit Circulus æquatione $yy + xx - cc = 0$; expressus. Ad $y$ elimininandum subtrahatur primum prior æquatio a posteriori, ac remanebit

$$2xy + 2ax - cc = 0, \text{ unde fit } y = \frac{cc - 2ax}{2x}$$

ex qua jam patet, quicunque valores pro $x$ resultent, iis semper valores ipsius $y$ reales repertum iri. Substituatur ergo iste valor pro $y$ inventus in altera æquatione, ac prodibit

$$c^4 - 4accx + 4(aa - cc)xx + 4x^4 = 0,$$

cujus adeo æquationis singulæ radices reales præbebunt intersectiones veras. Ponamus esse $c = 2a$ ideoque

$$4a^4 - 4a^3x - 3aaxx + x^4 = 0,$$

cujus æquationis una radix est $x = 2a$, qua extracta remanebit hæc æquatio

$$x^3 + 2axx + aax - 2a^3 = 0,$$

quæ unam adhuc præbet radicem realem; utrique autem Applicata conveniens invenitur ex hac æquatione $y = \frac{2aa - ax}{x}$, priori scilicet $x = 2a$, respondebit $y = 0$, ita ut intersectio in ipso fiat Axe.

466. Hinc intelligitur quoties ambæ æquationes inter $x$ & $y$ ita fuerint comparatæ, ut in negotio eliminationis ipsius $y$ inveniatur Functio rationalis ipsius $x$ quæ æqualis sit ipsi $y$; tum unamquamque radicem realem ipsius $x$, quam ultima æquatio, (postquam $y$ penitus est eliminata,) præbebit, exhibituram esse intersectionem veram. Verum, si inter eliminandum nulla inveniatur Functio rationalis ipsius $x$, quæ æqualis sit ipsi $y$; tum evenire potest, ut non omnes radices reales ex ultima

LIB. II. æquatione erutæ præbeant interſectiones veras. Tantus enim ſubinde valor pro $x$ prodire poteſt, cui in neutra Curva Applicata realis reſpondeat; neque tamen hoc caſu calculus erroris eſt arguendus. Cum enim hujuſmodi Abſciſſæ pro utraque Curva Applicata imaginaria reſpondeat, in imaginariis autem æqualitas & inæqualitas æque locum habeat atque in realibus; nihil impedit, quo minus Applicatæ illæ imaginariæ inter ſe ſint æquales, ideoque interſectionem mentiantur.

TAB. XXIII. Fig. 96. 467. Ad hoc clarius oſtendendum, deſcribantur ſuper eodem Axe $BAE$ Parabola $EM$ Parametri $= 2a$, & extra eam Circulus $AmB$ Radii $= c$: exiſtente intervallo $AE = b$; ita ut certum ſit nullam prorſus dari interſectionem. Sumatur $A$ pro Abſciſſarum initio, quæ verſus $E$ affirmativæ, retro autem verſus $B$ negativæ ſtatuantur; atque, pro Parabola habebitur hæc æquatio $yy = 2ax - 2ab$; pro Circulo vero hæc $yy = -2cx - xx$. Quod, ſi jam, quaſi interſectionem indagare velimus, eliminemus $y$, ſtatim habebimus $xx + 2(a+c)x - 2ab = 0$, ex qua duo pro $x$ valores reales reperiuntur, nempe

$$x = -a - c \pm \surd((a+c)^2 + 2ab),$$

alter affirmativus, alter negativus; cum tamen nulla exiſtat interſectio. Pro his ſcilicet duabus Abſciſſis tam Parabola quam Circulus exhibebit Applicatas imaginarias, quæ, utut imaginariæ, tamen inter ſe erunt æquales: fiet autem hoc ipſius $x$ valore ſubſtituto

$$y = \surd(-2aa - 2ac - 2ab \pm 2a\surd(aa + 2ac + cc + 2ab))$$

quæ expreſſio utique eſt imaginaria.

468. Ex hoc exemplo intelligitur dari etiam Curvarum interſectiones imaginarias; quæ, etiamſi ſint nullæ, tamen per calculum æque indicentur ac reales. Atque hanc ob rem ex numero radicum realium ipſius $x$, quas ultima æquatio continet, non ſemper interſectionum numerus recte concludetur; fieri enim poteſt ut plures radices reales adſint quam inter-

sectiones, atque etiam nulla omnino existat intersectio; cum tamen duæ pluresve radices reales ipsius $x$ resultent. Interim tamen quælibet intersectio semper unam inducet radicem realem ipsius $x$ in æquationem ultimam; & hanc ob rem semper tot, ad minimum, erunt radices reales ipsius $x$, quot sunt intersectiones, etiamsi interdum plures radices reales affuerint. Utrum autem unicuique radici reali ipsius $x$ intersectio realis respondeat facile perspicietur, si valor ipsius $y$ respondens quæratur, qui si prodeat realis, intersectio erit realis, sin sit imaginarius intersectio quoque erit imaginaria vel nulla.

469. Hæc igitur exceptio seu differentia inter radicum realium ipsius $x$ & intersectionum numerum tantum locum habet, si vel in utraque æquatione Applicata $y$ pares tantum ubique habeat dimensiones, atque adeo Axis principalis simul sit utriusque Curvæ Diameter; vel si ambæ æquationes ita fuerint comparatæ, ut, dum eliminatur $yy$, simul $y$ ex calculo excedat; sicque $y$ per Functionem rationalem ipsius $x$ exprimi nequeat. Sic, si altera æquatio fuerit $yy - xy = aa$, altera vero $y^4 - 2xy^3 + x^3y = bbxx$; cum ex priori sit $(yy - xy)^2 = a^4$, seu $y^4 - 2xy^3 = a^4 - xxyy$, substituatur hic valor in altera, eritque $a^4 - xxyy + x^3y = bbxx$, seu $yy - xy = \frac{a^4 - bbxx}{xx} = aa$: unde fit $xx = \frac{a^4}{aa + bb}$ ideoque $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Videtur ergo dari duplex intersectio, sed an utraque sit realis ex valore ipsius $y$ colligi debet, quem hæc æquatio $yy - xy = aa$ suppeditat. Erit ergo

$yy = \frac{\pm aay}{\sqrt{(aa+bb)}} + aa$, cujus cum omnes radices sint reales, patet quatuor dari intersectiones, ita ut utrique Abscissæ $x = \frac{\pm aa}{\sqrt{(aa+bb)}}$ binæ intersectiones reales respondeant.

470. Quando autem neque Axis utriusque Curvæ Diameter existit, neque iste casus locum habet, ut dum altiores ipsius $y$ potestates eliminantur, simul $y$ prorsus elimınetur; tum,

LIB. II. quia ad Functionem rationalem ipsius $x$ perveniet̃ur ipsi $y$ æqualem, singulæ radices reales ultimæ æquationis totidem indicabunt intersectiones veras, ita ut his casibus nulla cautione sit opus. Evenit hoc, si altera Curva abeat in rectam, uti ante vidimus, vel, si ejus Applicata exprimatur per Functionem uniformem ipsius $x$; tum enim nulli Abscissæ respondebit Applicata imaginaria; ideoque singulæ radices ipsius $x$ exhibebunt intersectiones veras. Plerumque autem, etiamsi $y$ in utraque æquatione plures obtineat dimensiones, tamen inter eliminationem ipsius $y$, perveniri solet ad æquationem, qua valor ipsius $y$ per Functionem rationalem, ideoque uniformem, ipsius $x$ exprimitur.

471. Quoties autem accidit, ut aliquot intersectiones quas calculus exhibet, sint imaginariæ, id non solum iis evenit casibus, quando neutra Curva habet Applicatam realem illi Abscissæ inventæ respondentem; quod quidem factum est in superiori Circuli & Parabolæ exemplo. Sed etiam ejusmodi casus exhiberi possunt, quibus una Curva pro omnibus Abscissis præbet Applicatas reales, neque tamen singulis radicibus realibus ipsius $x$ intersectiones respondeant. Hujusmodi exemplum præbet Linea tertii ordinis, hac æquatione expressa

$$y^3 - 3ayy + 2aay - 6axx = 0,$$

quæ pro omnibus Abscissis reales præbet Applicatas; & quidem ternas si fuerit $x$ minor quam $\frac{a}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$. Quod, si cum hac Curva combinetur Parabola æquatione $yy - 2ax = 0$, contenta, cujus nulla datur Applicata realis, si $x$ sit negativum, ideoque Abscissis $x$ negativis nulla intersectio convenire potest.

472. Eliminetur jam $y$: &, cum sit ex æquatione posteriori $yy = 2ax$, prior æquatio abibit in hanc

$$2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0, \text{ unde fit}$$

$y = \frac{6aax + 6axx}{2aa + 2ax} = 3x$. Quoniam vero illa æquatio eſt diviſibilis per $y - 3x$; ſi dividatur, orietur æquatio ab $y$ libera hæc $2aa + 2ax = 0$, unde oritur $x = -a$. Deberet ergo eſſe interſectio Curvarum reſpondens Abſciſſæ $x = -a$, cui in Parabola nulla applicata realis reſpondet: in Linea autem altera tertii ordinis, poſito $x = -a$, fit $y^3 - 3ayy + 2aay - 6a^3 = 0$, ex qua una naſcitur Applicata realis, $y = 3a$, reliqui duo ipſius $y$ valores in æquatione $yy + 2aa = 0$ contenti, ſunt imaginarii; hoc ſcilicet loco Applicatæ iſtæ imaginariæ æquales fiunt Applicatis Parabolæ imaginariis eodem hoc loco; ſicque habebuntur duæ interſectiones imaginariæ. Habebuntur vero etiam duæ interſectiones reales ex ſuperioris æquationis Factore $y - 3x = 0$, oriundæ; ex qua fit $9xx - 2ax = 0$. Primum ergo in ipſo Abſciſſarum initio, ubi $x = 0$, ſimulque $y = 0$, exiſtit interſectio, altera reſpondet Abſciſſæ $x = \frac{2a}{9}$, ubi eſt $y = 3x = \frac{2a}{3}$.

473. Hoc igitur caſu perventum eſt ad interſectiones imaginarias, etiamſi in negotio eliminationis ipſius $y$, prodierit æquatio $2axy - 6aax + 2aay - 6axx = 0$, in qua $y$ unicam tantum obtinet dimenſionem, ita ut inde $y$ per Functionem rationalem ipſius $x$ exprimi poſſe videatur, quod ante tanquam criterium nullarum interſectionum imaginariarum annotavimus. Atque revera, ſi hæc æquatio nullos haberet diviſores, interſectionibus imaginariis nullus locus relinqueretur, quoniam vero hoc caſu per diviſionem elicitur æquatio Applicatam $y$ non amplius involvens, perinde eſt, ac ſi $y$ per Functionem rationalem ipſius $x$ exprimi non poſſet. Quoties ſcilicet hujuſmodi æquatio in Factores eſt reſolubilis, pro unoquoque Factore ſeorſim judicium eſt ferendum, unde fit, ut, dum alter Factor interſectiones imaginarias penitus reſpuit, alter eaſdem admittat.

474. His perpenſis, oſtendamus aliquanto diſtinctius, quem-

LIB. II. admodum duabus quibusvis Curvis propositis earum intersectiones definiri debeant : atque, cum hæc investigatio ab eliminatione alterius Coordinatæ $y$ pendeat, ad hujus tantum dimensiones, quas in utraque æquatione obtinet, erit respiciendum. Eliminatio enim eodem modo absolvetur, utcunque altera Coordinata $x$ utramque æquationem afficiat. Sint igitur P, Q, R, S, T &c., itemque $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ &c., Functiones quæcunque rationales ipsius $x$ : ac primo quidem ponamus ambas Curvas, quarum intersectiones requiruntur, exprimi his æquationibus

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy = 0$$

multiplicetur prior æquatio per $p$, posterior per P; atque hæ æquationes a se invicem subductæ relinquent hanc æquationem ab $y$ prorsus liberam.

$$pQ - Pq = 0.$$

Hujus igitur æquationis, in qua sola incognita $x$, præter constantes, inest, omnes radices reales ipsius $x$ præbebunt puncta in Axe, quibus intersectiones imminent. Pro quocunque valore ipsius $x$ invento habebitur valor ipsius $y$ realis ex alterutra æquatione $y = \frac{-P}{Q} = \frac{-p}{q}$, qui intersectionem indicabit; unde, si utriusque Curvæ Applicata $y$ exprimatur per Functionem rationalem seu uniformem ipsius $x$, nullæ intersectiones imaginariæ locum inveniunt.

475. Exprimatur jam alterius Curvæ Applicata $y$ per Functionem uniformem ipsius $x$ ut ante; alterius vero per Functionem biformem, ita ut sit

I.

CAP. XIX.

$$\text{I.}\quad P + Qy = 0$$

$$\text{II.}\quad p + qy + ryy = 0,$$

multiplicetur prior æquatio per $p$, poſterior per P, & a ſe invicem ſubtrahantur, factaque diviſione per $y$, erit

$$\text{III.}\quad pQ - Pq - Pry = 0,$$

ſeu

$$(Pq - pQ) + Pry = 0.$$

Nunc multiplicetur prima per $Pr$, & tertia per Q, atque, facta ſubtractione, emerget hæc æquatio ab $y$ libera.

$$PPr - PQq + pQQ = 0.$$

Hujus æquationis ergo ſingulæ radices præbebunt Abſciſſas interſectionibus reſpondentes, quibus cum Applicatæ reales $y = \frac{-P}{Q} = \frac{pQ - Pq}{Pr}$ conveniant, interſectiones erunt reales.

476. Sit, ut ante, alterius Curvæ Applicata æqualis Functioni uniformi ipſius $x$; alterius vero Curvæ Applicata exprimatur per æquationem cubicam; ſeu, ſit Functio triformis ipſius $x$, ita ut binæ æquationes propoſitæ ſint hujuſmodi:

$$\text{I.}\quad P + Qy = 0$$

$$\text{II.}\quad p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

multiplicetur prior per $p$ & poſterior per P; alteraque ab altera ſubducta ac diviſione per $y$ facta, erit

$$\text{III.}\quad (Pq - pQ) + Pry + Psyy = 0,$$

 in qua si loco $y$ valor ex prima $y = \frac{-P}{Q}$ substituatur & a fractionibus liberetur, proveniet ista æquatio

$$PQQq = pQ^3 - P^2Qr + P^3s = 0,$$

seu

$$Q^3p - PQ^2q + P^2Qr - P^3s = 0,$$

quæ eadem statim prodit, si in secunda æquatione loco $y$ ejus valor ex prima $\frac{-P}{Q}$ substituatur. Hujus ergo ultimæ æquationis omnes radices reales ipsius $x$, quoniam singulis per primam æquationem $y = \frac{-P}{Q}$ Applicatæ reales respondent, totidem intersectiones veras monstrabunt.

477. Simili modo, si alterius Curvæ Applicata $y$ exprimatur per æquationem quatuor pluriumve dimensionum, dum alterius Applicata manet Functio uniformis seu rationalis ipsius $x$, facile incognita $y$ eliminatur. Sint enim ambæ æquationes propositæ

I.

$$P + Qy = 0$$

II.

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0;$$

atque, cum ex priori sit $y = \frac{-P}{Q}$, hic valor in altera substitutus dabit æquationem inter $x$ & cognitas tantum hanc

$$Q^4p - PQ^3q + P^2Q^2r - P^3Qs + P^4t = 0.$$

Hujus ergo æquationis singulæ radices ipsius $x$ reales suppeditabunt totidem intersectiones veras; propterea quod unicuique Abscissæ $x$ ex prima æquatione assignari potest una Applicata $y$ realis, nempe $y = \frac{-P}{Q}$.

478. Exprimatur jam utriusque Curvæ Applicata $y$ per

æquationem quadraticam; ac primo quidem puram, ita ut æquationes ambæ sint hujusmodi

$$\text{I.}\quad P + Ryy = 0$$
$$\text{II.}\quad p + ryy = 0$$

ex quibus, eliminando $yy$, statim obtinetur hæc æquatio,

$$Pr - Rp = 0,$$

cujus singulæ radices reales tum solum demonstrant intersectiones veras, si valores ipsius $x$ inventi ita fuerint comparati, ut $\frac{-P}{R}$ vel $\frac{-p}{r}$ fiat quantitas affirmativa; tum enim, ob $yy = \frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$, Applicata $y$ duplicem nanciscetur valorem realem, alterum affirmativum alterum negativum; ideoque cuique Abscissæ $x$ valori ex æquatione $Pr - Rp = 0$, invento, binæ respondebunt intersectiones, ab Axe utrinque æqualiter distantes, quod, cum Axis utriusque Curvæ Diameter existat, aliter evenire non potest. Quod si autem quis valor ipsius $x$ ex æquatione $Pr - Rp = 0$, inventus expressionibus $\frac{-P}{R} = \frac{-p}{r}$ inducat valorem negativum; tum, ob $y$ imaginarium, intersectiones quoque erunt imaginariæ.

479. Adsit nunc in utraque æquatione proposita quadratica secundus quoque terminus continens $y$, sintque ambæ æquationes propositæ istæ

$$\text{I.}\quad P + Qy + Ryy = 0$$
$$\text{II.}\quad p + qy + ryy = 0.$$

Ad incognitam $y$ ex his æquationibus eliminandam multiplicetur primum illa æquatio per $p$, hæc vero per $P$, factaque subtractione & divisione per $y$, erit

Lib. II.

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y = 0.$$

Deinde multiplicetur prior æquatio per $r$, posterior vero per $R$, alteraque ab altera subtracta habebitur

IV.

$$(Pr - Rp) + (Qr - Rq)y = 0.$$

Cum igitur ex his duabus æquationibus sit

$$y = \frac{Qp - Pq}{Pr - Rp} = \frac{Rp - Pr}{Qr - Rq}$$

erit

$$(Qp - Pq)(Qr - Rq) + (Pr - Rp)^2 = 0,$$

seu

$$P^2r^2 - 2PRpr + R^2p^2 + Q^2pr - PQqr - QRpq + PRq^2 = 0.$$

Cujus æquationis singulæ radices reales ostendent totidem intersectiones veras, si quidem cuique valori ipsius $x$ valor realis ipsius $y$ convenit ex æquatione III. vel IV. Interim tamen fieri potest, ut intersectiones sint imaginariæ, quod evenit si æquationes III. & IV. habeant Factores; ita ut ex iis jam per divisionem æquatio ab $y$ libera elici queat. Tum enim hæc æquatio in locum ultimæ substitui, atque ad valores ipsius $y$ inde erutos ex primis æquationibus valores ipsius $y$ respondentes quæri debebunt; qui si fuerint imaginarii, hoc erit indicio intersectiones esse imaginarias.

480. Sit porro in una Curva Applicata $y$ Functio biformis, in altera autem triformis ipsius $x$; seu, sint ambæ Curvarum æquationes propositæ hæ

I.

$$P + Qy + Ryy = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Multiplicetur prior per $p$, posterior per $P$, alteraque ab altera subtracta remanebit

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + Psyy = 0,$$

quæ cum prima conjuncta exhibet casum in præcedente paragrapho pertractatum; ita ut, quæ ibi erant $p$, $q$, $r$, hic sint $Pq - Qp$, $Pr - Rp$, & $Ps$: ideoque reperietur hic

$$y = \frac{PQq - QQp - PPr + PRp}{PPs - PRq + QRp},$$

&

$$y = \frac{PRq - QRp - PPs}{PQs - PRr + RRp};$$

unde fit

$$0 = (PRq - QRp - PPs)^2 + (PQs - PRr + RRp).$$
$$(PQq - Q^2p - P^2r + PRp),$$

quæ æquatio evoluta dat

$$\begin{matrix} & & + 3P^2QRps & & \\ & - 2P^3Rqs & + P^2R^2qq & - PQR^2pq & \\ P^4s^2 & - P^3Qrs & + P^2Q^2qs & - PQ^3ps & + Q^2R^2p^2 \\ & + P^3Rrr & - P^2QRqr & + PQ^2Rpr & - Q^2R^2p^2 \\ & & - 2P^2R^2pr & + PR^3pp & \end{matrix} = 0$$

quæ, ob ultimum terminum evanescentem, divisibilis est per $P$, sicque prodibit hæc æquatio

$$\left.\begin{matrix} + P^3s^2 - 2P^2Rqs - P^2Qrs + 3PQRps + PQ^2qs - Q^3ps + R^3p^2 \\ + P^2Rr^2 - PQRqr - 2PR^2pr + Q^2Rpr + PR^2q^2 - QR^2pq \end{matrix}\right\} = 0.$$

Ex cujus æquationis radicibus realibus intersectiones cognoscentur, si quidem ipsis valores reales ipsius $y$ respondere deprehendantur.

481. Exprimatur nunc utraque Applicata per æquationem cubicam, sintque ambæ æquationes propositæ hæ

I.

$$P + Qy + Ryy + Sy^3 = 0$$

II.

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

LIB. II. Multiplicetur prior per $p$, posterior per P, factaque subtractione alterius ab altera, remanebit

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)yy = 0.$$

Deinde multiplicetur prior per $s$, posteriorque per $S$, factaque subtractione remanebit

IV.

$$(Sp - Ps + (Sq - Qs)y + (Sr - Rs)yy = 0.$$

Hæ æquationes III. & IV. si comparentur cum binis æquationibus §. 479. tractatis, fiet ut sequitur

$$\begin{array}{l|l} P = Pq - Qp & p = Sp - Ps \\ Q = Pr - Rp & q = Sq - Qs \\ R = Ps - Sp & r = Sr - Rs \end{array}$$

Quibus in æquatione finali substitutis, emerget

$$\begin{aligned} &+ (Pq - Qp)^2(Sr - Rs)^2 - 2(Pq - Qp)(Ps - Sp)(Sp - Ps)(Sr - Rs) \\ &+ (Ps - Sp)^2(Sp - Ps)^2 + (Pr - Rp)^2(Sp - Ps)(Sr - Rs) - \\ &\quad (Pq - Qp)(Pr - Rp)(Sq - Qs)(Sr - Rs) - (Pr - Rp)(Ps - Sp) \\ &\quad (Sp - Ps)(Sq - Qs) + (Pq - Qp)(Ps - Sp)(Sq - Qs)^2 = 0. \end{aligned}$$

In hac æquatione septem sunt termini, qui omnes sunt divisibiles per $Sp - Ps$, præter primum & quintum: qui autem, si conjungantur, duos habebunt Factores, alterum $(Pq - Qp)(Sr - Rs)$, alterum vero $(Pq - Qp)(Sr - Rs) - (Pr - Rp)(Sq - Qs)$, qui posterior resolutus fit $= PQrs + RSpq - PRqs - QSpr$ ideoque, $= (Sp - Ps)(Rq - Qr)$: unde termini I. & V. coalescent in hanc formam $(Pq - Qp)(Sr - Rs)(Sp - Ps)(Rq - Qr)$ quoque per $Sp - Ps$ divisibilem. Quocirca orietur hæc æquatio

$0 = (Pq - Qp)(Sr - Rs)(Rq - Qr) + 2(Pq - Qp)(Sp - Ps)$ CAP. XIX.
$(Sr - Rs) + (Sp - Ps)^3 + (Pr - Rp)^2 (Sr - Rs) + (Pr - Rp)$
$(Sp - Ps)(Sq - Qs) - (Pq - Qp)(Sq - Qs)^2$

quæ evoluta dabit

$+ S^3p^3 - 3PS^2p^2s + P^2Sr^3 + 2PR^2prs - P^2Rr^2s + P^2Qrss + PRSqqr$
$- P^3s^3 + 3P^2Sps^2 - R^3p^2s - 2PRSpr^2 + R^2Sp^2r - RSSp^2q - QQRprs$
$- PR^2qqs - PQSqrr + PQRqrs + 3PSSpqr - 3PPSqrs + PQSprs$
$+ Q^2Sprr + QRRpqs - QRSpqr - 3PQRpss + 3QRSpps - PRSpqs$
$+ 2P^2Rqss + 2PQSqqs - PSSq^3 - PQ^2qss - 2QS^2ppr -$
$2QQSpqs + Q^3pss + QS^2pqq = 0.$

482. Quo methodus iſta eliminandi $y$ ex duabus æquationibus altiorum graduum clarius percipiatur, ponamus utramque æquationem propoſitam eſſe quarti ordinis

I.

$$P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + Ty^4 = 0$$

II.

$$p + qy + ry^2 + sy^3 + ty^4 = 0,$$

multiplicetur æquatio prior per $p$, poſterior per P, atque poſt ſubtractionem relinquetur

III.

$$(Pq - Qp) + (Pr - Rp)y + (Ps - Sp)y^2 + (Pt - Tp)y^3 = 0.$$

Deinde multiplicetur æquatio I. per $t$, poſterior II. per T, &, facta ſubtractione, remanebit

IV.

$$(Pt - Tp) + (Qt - Tq)y + (Rt - Tr)y^2 + (St - Ts)y^3 = 0.$$

Ponatur nunc brevitatis gratia

| | | |
|---|---|---|
| $Pq - Qp = A$ | $Pt - Tp = a$ | $Sq - Qs = \alpha$ |
| $Pr - Rp = B$ | $Qt - Tq = b$ | $Rq - Qr = \beta$ |
| $Ps - Sp = C$ | $Rt - Tr = c$ | |
| $Pt - Tp = D$ | $St - Ts = d$ | |

ubi notandum eſt eſſe non ſolum $a = D$; ſed eſſe quoque

$$Ad - Cb = (Pt - Tp)(Sp - Qs = D\alpha$$
$$Ac - Bb = (Pt - Tp)(Rq - Qr = D\beta.$$

His ergo ſubſtitutionibus æquationes III. & IV. induent has formas

III.

$$A + By + Cyy + Dy^3 = 0$$

IV.

$$a + by + cyy + dy^3 = 0.$$

Nunc porro æquationes hæ multiplicentur reſpective per $d$ & D, & a ſe invicem ſubtrahantur, prodibitque

V.

$$(Ad - Da + (Bd - Db)y + (Cd - Dc)y^2 = 0.$$

Tum eædem illæ æquationes multiplicentur per $a$ & A, & poſt ſubtractionem relinquetur

VI.

$$(Ab - Ba + (Ac - Ca)y + (Ad - Da)y^2 = 0.$$

Jam ſtatuatur iterum brevitatis gratia

| | | |
|---|---|---|
| $Ab - Ba = E$ | $Ad - Da = e$ | $Cb - Bc = \zeta$ |
| $Ac - Ca = F$ | $Bd - Db = f$ | |
| $Ad - Da = G$ | $Cd - Dc = g$ | |

eritque $G = e$; & $Eg - Ff = G\zeta$; ita ut & $Eg - Ff$ ſit diviſibile per G. Hinc ſequentes habebimus æquationes

V.

$$E + Fy + Gyy = 0$$

VI.

$$e + fy + gyy = 0.$$

Ex quibus per ſimilem operationem eliciuntur iſtæ

VII.

$$(Ef - Fe) + (Eg - Ge)y = 0$$

VIII.

$$(Eg - Ge) + (Fg - Gf)y = 0.$$

Denique

Denique iterum ponatur brevitatis gratia

$$\begin{array}{l|l} Ef - Fe = H & Eg - Ge = h \\ Eg - Ge = I & Fg - Gf = i \end{array}$$

ita ut fit $I = h$, habebiturque

VII.

$$H + Iy = 0$$

VIII.

$$h + iy = 0,$$

ex quibus tandem colligitur hæc æquatio ab $y$ libera

$$Hi - Ih = 0.$$

In qua fi valores præcedentes fucceffive reftituantur, obtinebitur æquatio quam folæ Functiones P, Q, R, &c. $p, q, r$, &c. primarum æquationum ingrediuntur. Æquatio vero inter E, F, G, $e, f, g$, divifibilis erit per $G = e$; atque, fi procedatur ad litteras A, B, C, D, $a, b, c, d$, æquatio refultans divifionem admittet per $D' = a'$, ita, ut in æquatione ultima quivis terminus octo tantum complexurus fit litteras, quatuor majufculas, totidemque minufculas. Hoc itaque modo in genere, quotcunque dimenfiones ipfius $y$ utraque æquatio propofita contineat, femper incognita $y$, poterit eliminari, atque æquatio, quæ folam incognitam $x$ involvat, inveniri.

483. Etfi hujus methodi ex duabus æquationibus unam incognitam eliminandi ufus latiffime patet, tamen aliam adhuc methodum fubjungam, quæ tot repetitis fubftitutionibus non indigeat. Sint igitur propofitæ duæ æquationes quotcunque dimenfionum

I.

$$Py^m + Qy^{m-1} + Ry^{m-2} + Sy^{m-3} + \&c. = 0$$

II.

$$py^n + qy^{n-1} + ry^{n-2} + sy^{n-3} + \&c. = 0,$$

LIB. II. ex quibus unam æquationem, in qua $y$ amplius non inſit, conflari oporteat. Ad hoc multiplicetur æquatio poſterior per hanc quantitatem

$$Py^{k-n} + Ay^{k-n-1} + By^{k-n-2} + Cy^{k-n-3} + \&c.,$$

quæ $k - n$ litteras arbitrarias A, B, C, &c., continet. Æquatio vero prior multiplicetur per hanc quantitatem

$$py^{k-m} + ay^{k-m-1} + by^{k-m-2} + cy^{k-m-3} + \&c.,$$

in qua $k - m$ litteræ arbitrariæ $a$, $b$, $c$, &c., inſunt. Tum ambo producta ita inter ſe æqualia ponantur ut omnes termini qui continent poteſtates ipſius $y$ ſe mutuo deſtruant, terminique ultimi ipſa $y$ carentes æquationem quæſitam exhibeant. Summæ autem poteſtates jam ſponte ſe deſtruunt, in utroque enim producto ſummus terminus erit $Ppy^k$; ſuperſunt ergo adhuc $k - 1$ termini, qui deſtrui debebunt, ad quod totidem litteræ arbitrariæ ſunt determinandæ. Numerus autem litterarum arbitrariarum ſic introductarum eſt $2k - m - n$, qui cum æqualis eſſe debeat $k - 1$, fiet $k = m + n - 1$.

484. Hanc ob rem prima æquatio multiplicetur per hanc quantitatem indeterminatam

$$py^{n-1} + ay^{n-2} + by^{n-3} + cy^{n-4} + \&c.,$$

ſecunda vero æquatio multiplicetur per hanc

$$Py^{m-1} + Ay^{m-2} + By^{m-3} + Cy^{m-4} + \&c.$$

Singuliſque terminis, in quibus ſimiles ipſius $y$ occurrunt poteſtates, inter ſe coæquatis, naſcentur ſequentes æquationes

$$\begin{gathered} Pp = Pp \\ Pa + Qp = pA + qP \\ Pb + Qa + Rp = pB + qA + rP \\ Pc + Qb + Ra + Sp = pC + qB + rA + sP \\ \&c. \end{gathered}$$

Hujusmodi ergo æquationes, prima $Pp = Pp$ simul computata, habebuntur numero $m + n$, ex quibus si litteræ arbitrariæ A, B, C, &c. $a$, $b$, $c$, &c. determinentur, ultima æquatio nonnisi litteras datas P, Q, R, &c. $p$, $q$, $r$, &c. continebit, sicque quæsito satisfaciet. 

485. Hæc autem litterarum arbitrariarum determinatio facilius expedietur, si membra uniuscujusque æquationis æqualia ponantur novis indeterminatis quantitatibus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, &c.; quod ex sequenti exemplo clarius apparebit.

Sint propositæ hæ æquationes duæ

I.

$$Py^2 + Qy + R = 0$$

II.

$$py^3 + qy^2 + ry + s = 0,$$

multiplicetur ergo prima per $py^2 + ay + b$, & altera per $Py + A$; prodibuntque hæ æqualitates

$$\begin{aligned} Pp &= Pp \\ Pa + Qp &= pA + qP = \alpha \\ Pb + Qa + Rp &= qA + rP = \mathfrak{c} \\ Qb + Ra &= rA + sP \\ Rb &= sA \end{aligned}$$

Æquatione prima identica omissa, ex secunda fit

$$a = \frac{\alpha - Qp}{P}$$

$$A = \frac{\alpha - qP}{p}.$$

Ex tertia vero obinebitur

$$b = \frac{\mathfrak{c}}{P} - \frac{Qa}{P} - \frac{Rp}{P} = \frac{\mathfrak{c}}{P} - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P}$$

&

$$\mathfrak{c} = \frac{\alpha q}{p} - \frac{qqP}{p} + rP,$$

quo valore ipſius β ſubſtituto, erit

$$b = \frac{\alpha q}{Pp} - \frac{qq}{p} + r - \frac{\alpha Q}{P^2} + \frac{Q^2 p}{P^2} - \frac{Rp}{P},$$

ſeu

$$b = \frac{\alpha(Pq - Qp)}{P^2 p} + \frac{(Q^2 p^2 - P^2 q^2)}{P^2 p} + \frac{(Pr - Rp)}{P};$$

qui valor, in quarta æquatione ſubſtitutus, dabit

$$\frac{\alpha Q(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{Q(Pq - Qp)(Qp + Pq)}{P^2 p} + \frac{Q(Pr - Rp)}{P} + \frac{\alpha R}{P} - \frac{RQp}{P} = \frac{\alpha r}{p} - \frac{Prq}{p} + Ps,$$

ſeu, per $P^2 p$ multiplicando,

$$\alpha Q(Pq - Qp) + \alpha P(Rp - Pr) - Q(Pq - Qp)(Pq + Qp) + PQp(Pr - 2Rp) + P^2 qr - P^2 ps = 0.$$

Ergo fiet

$$\alpha = \frac{P^2 Qq^2 - Q^2 pp - P^2 Qpr + 2PQRp^2 - P^2 qr + P^2 ps}{PQq - Q^2 p + PRp - P^2 r}.$$

Ultima vero æquatio dabit

$$\frac{\alpha R(Pq - Qp)}{P^2 p} - \frac{R(P^2 q^2 - Q^2 p^2)}{P^2 p} + \frac{R(Pr - Rp)}{P} = \frac{\alpha S}{p} - \frac{Pqs}{p},$$

ex qua quoque elicitur

$$\alpha = \frac{P^2 Rq^2 - Q^2 RP^2 - P^2 Rpr + PR^2 p^2 - P^2 qs}{PRq - QRp - P^2 s},$$

qui gemini ipſius α valores præbebunt æquationem quæſitam, quæ tandem reducetur ad eandem formam, quam ſupra §. 480. pro eodem caſu invenimus.

## CAPUT XX.

### *De Constructione æquationum.*

486. Quæ in ſuperiori Capite de interſectione Curvarum ſunt expoſita potiſſimum ad conſtructiones æquationum altiorum graduum traduci ſolent. Cum enim duabus Curvis propoſitis æquationem invenerimus, cujus radices interſectionum locos exhibeant; ita viciſſim interſectiones duarum Curvarum inſervire poſſunt radicibus æquationum indicandis, Atque hic modus maximam affert utilitatem ſi radices cujuſpiam æquationis per Lineas exprimi debeant; deſcripta, namque utraque Curva ad hunc finem accommodata, interſectiones facile notabuntur, unde ſi ad Axem Applicatæ demittantur, Abſciſſæ præbebunt veras æquationis radices. Si autem incommodum ſupra memoratum locum habeat, tum quidem omnes Abſciſſæ ſic inventæ radices præbebunt, at fieri poterit ut æquatio propoſita plures complectatur radices, quam per talem conſtructionem reperiuntur.

487. Cum igitur propoſita fuerit æquatio algebraïca incognitam $x$ involvens, cujus radices aſſignari oporteat, duæ quærendæ ſunt Lineæ curvæ, ſeu duæ æquationes inter binas variabiles $x$ & $y$, quæ ita ſint comparatæ, ut, ſi ex iis Applicata $y$ eliminetur, ipſa æquatio propoſita reſultet. Quo facto iſtæ duæ Curvæ ſuper communi Axe atque ad idem Abſciſſarum initium deſcribantur, punctaque, quibus ſe mutuo interſecabunt, notentur. Tum ex his interſectionum punctis ad Axem Applicatæ normales demittantur, quæ in Axe exhibebunt Abſciſſas ſingulis æquationis propoſitæ radicibus æquales. Hoc itaque modo ſingularum radicum quæſitarum valores veri aſſignabuntur, niſi forte eveniat, ut æquatio plures contineat radices, quam interſectiones adeſſe deprehendantur.

LIB. II. 488. Antequam autem modum tradam, quo binæ illæ Curvæ constructioni datæ æquationis inservientes inveniri queant, a posteriori eas æquationes perpendamus, quarum resolutio ex datis duabus Curvis absolvitur. Ac primo quidem sint ambæ Lineæ resolventes rectæ $EM$, $FM$, sese in puncto $M$ intersecantes. Sumatur recta $EF$ pro Axe, in eoque punctum $A$ pro initio Abscissarum, unde educta normalis $ABC$ rectam priorem in $B$, posteriorem in $C$ secet. Sit $AE = a$, $AF = b$; $AB = c$; $AC = d$; tum vero ponatur Abscissa $AP = x$; Applicata $PM = y$; eritque pro priori recta $EM$ $a : c = a + x : y$, seu $ay = c(a + x)$; & pro altera $b : d = b - x : y$, seu $by = d(b - x)$. Ex his æquationibus si eliminetur $y$, prodibit $bc(a + x) = ad(b - x)$ seu $x = \frac{abd - abc}{bc + ad} = \frac{ab(d - c)}{bc + ad}$. Per intersectionem ergo duarum Linearum rectarum construi poterit æquatio simplex $x = \frac{ab(d - c)}{bc + ad}$; ad quam formam omnes omnino æquationes simplices revocari possunt.

TAB. XXIII. Fig. 97.

TAB. XXIII. Fig. 98.

489. Lineas rectas ratione facilitatis describendi excipit Circulus, & hanc ob rem videamus cujusmodi æquationes per intersectionem rectæ & Circuli construi queant. Sit igitur, sumta $AP$ pro Axe & $A$ pro Abscissarum initio, descripta Linea recta $EM$: positisque $AE = a$, $AB = b$, & Coordinatis $AP = x$, $PM = y$; erit $a : b = a + x : y$; ideoque $ay = b(a + x)$, quæ est æquatio pro Linea recta. Deinde sit Radius Circuli $CM = c$, demissoque ex ejus Centro $C$ in Axem perpendiculo $CD$, vocetur $AD = f$, $CD = g$; erit $DP = x - f$, & $PM - CD = y - g$. Jam, cum sit ex natura Circuli $CM^2 = DP^2 + (PM - CD)^2$, erit æquatio pro Circulo $cc = xx - 2fx + ff + yy - 2gy + gg = (x - f)^2 + (y - g)^2$. At æquatio pro recta dat $y = \frac{ab + bx}{a}$, unde fit $y - g = \frac{a(b - g) + bx}{a} = b - g + \frac{bx}{a}$,

quo ipsius $y$ valore in altera æquatione substituto, emerget CAP. XX.

$$cc = xx - 2fx + ff + (b-g)^2 + \frac{2b(b-g)x}{a} + \frac{bbxx}{aa},$$

seu

$$\begin{array}{l} +aa \\ +bb \end{array} xx \begin{array}{l} +2ab(b-g) \\ -2aaf \end{array} x \begin{array}{l} +aa(b-g)^2 \\ +aaff \\ -aacc \end{array} = 0,$$

cujus ergo æquationis radices invenientur per intersectiones Rectæ & Circuli, ita ut, demissis ex intersectionibus $M$ & $m$ in Axem perpendiculis $MP$, $mp$, valores ipsius $x$ futuri sint $AP$ & $Ap$.

490. Quoniam in hac æquatione omnes æquationes quadraticæ continentur, hinc constructio generalis æquationum quadraticarum adornari poterit. Sit scilicet proposita hæc æquatio quadratica

$$Axx + Bx + C = 0,$$

quæ ad superiorem formam primum ita reducatur ut primi termini conveniant; multiplicando per $\frac{aa+bb}{A}$,

$$(aa+bb)xx + \frac{B(aa+bb)x}{A} + \frac{C(aa+bb)}{A} = 0.$$

Jam coæquatio reliquorum terminorum dabit

$$2Aab(b-g) - 2Aaaf = B(aa+bb)$$

ideoque fiet

$$af = b(b-g) - \frac{B(aa+bb)}{2Aa},$$

Unde, cum sit

$$aa(b-g)^2 + aaff - aacc = \frac{C(aa+bb)}{A},$$

erit

$$(aa+bb)(b-g)^2 - \frac{Bb(b-g)(aa+bb)}{A} + \frac{BB(aa+bb)^2}{4A^2a^2} - aacc = \frac{C(aa+bb)}{Aa}$$

ideoque

LIB. II. $(b-g)^2 = \frac{Bb(b-g)}{Aa} - \frac{B(aa+bb)}{4A^2a^2} + \frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A}$,

ergo

$$b-g = \frac{Bb}{2Aa} \pm \surd\left(\frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4AA}\right).$$

Manent igitur tres quantitates $a$, $b$, & $c$, adhuc indeterminatæ, quas autem ita accipi oportet, ut $\frac{aacc}{aa+bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4AA}$, fiat quantitas affirmativa, quia alioquin $b-g =$ AB — CD, hincque CD, fieret quantitas imaginaria.

491. Nihil ergo impedit quominus ponamus $b=0$, eritque $g = \surd\left(cc - \frac{BB+4AC}{4AA}\right)$ & $f = \frac{-B}{2A}$. Deinde vero, cum æquatio proposita $Axx + Bx + C = 0$, radices nullas habeat reales, nisi sit BB major quam 4AC, erit hoc casu $\frac{BB-4AC}{4AA}$ quantitas affirmativa, cui si $cc$ ponatur æquale, ut sit $c = \frac{\surd(BB-4AC)}{2A}$, fiet quoque $g=0$, & $a$ prorsus ex calculo excedit. Linea ergo recta $EM$ in ipsum Axem $AP$ incidet, & Centrum Circuli $C$ collocari debebit in puncto $D$ existente $AD = \frac{-B}{2A}$, ex quo Centro si Circulus describatur Radio $c = \frac{\surd(BB-4AC)}{2A}$, hujus intersectiones cum ipso Axe ostendent æquationis propositæ radices. Ne autem ad hoc constructione formulæ irrationalis opus sit, ponatur $g = c - \frac{k}{2A}$, ut fit $cc - \frac{2ck}{2A} + \frac{kk}{4AA} = cc - \frac{BB+4AC}{4AA}$, erit $c = \frac{kk+BB-4AC}{4kA}$, & $g = \frac{BB-4AC-kk}{4kA}$. In nostro ergo arbitrio determinatio quantitatis $k$ relinquitur; qua utcunque assumta, quia recta $CM$ in ipsum Axem incidit, Circulus sequenti modo describi debebit. Sumta $AD = \frac{-B}{2A}$

$\frac{-B}{2A}$, capiatur perpendiculum $CD = \frac{BB - 4AC - kk}{4Ak}$, & Centro $C$ describatur Circulus cujus Radius $= \frac{BB - 4AC + kk}{4Ak}$; hujusque intersectiones cum Axe ostendent radices æquationis propositæ. Quod si ergo statuatur $k = -B$, sumta $AD = \frac{-B}{2A}$, capiatur $CD = \frac{C}{B}$, & Circuli Centro $C$ describendi Radius erit $= \frac{-BB + 2AC}{2AB} = \frac{-B}{2A} + \frac{C}{B}$, ex quo Radius Circuli erit $= AD + CD$; quæ constructio pro praxi commodissima videtur. CAP. XX.

492. Consideremus jam duos Circulos se intersecantes: sitque pro primo $AD = a$, $CD = b$, & ejus Radius $CM = c$; eritque, positis $AP = x$ & $PM = y$, $DP = a - x$, $CD - PM = b - y$; ideoque, ex natura Circuli, habebitur TAB. XXIV. Fig. 99.

$$xx - 2ax + aa + yy - 2by + bb = cc.$$

Simili modo pro altero Circulo sit $Ad = f$, $dc = g$, ejusque Radius $cM = h$, eritque

$$xx - 2fx + ff + yy + 2gy + gg = hh,$$

quibus æquationibus a se invicem subtractis, remanebit

$$2(f-a)x + aa - ff - 2(b+g)y + bb - gg = cc - hh,$$

ergo

$$y = \frac{aa + bb - ff - gg - cc + hh - 2(a-f)x}{2(b+g)};$$

hincque

$$b - y = \frac{bb + 2bg - aa + ff + gg + cc - hh + 2(a-f)x}{2(b+g)},$$

&

$$a - x = \frac{2a(b+g) - 2(b+g)x}{2(b+g)}.$$

Cum igitur sit $(a-x)^2 + (b-y)^2 = cc$, erit, facta substitutione,

LIB. II.

$$\begin{array}{l}+4(a+f)^2\\+4(b+g)^2\end{array} xx \begin{array}{l}-4(a+f)(b+g)^2\\-4(a-f)(aa-ff)\\+4(a-f)(cc-hh)\end{array} x \begin{array}{l}+(b+g)^4\\+2(aa-cc)(b+g)^2\\+2(ff-hh)(b+g)^2\\+(aa-cc-ff+hh)^2\end{array} = 0.$$

Hujus ergo æquationis ope infinitis modis construi poterit æquatio $Axx + Bx + C = 0$ ; simul vero intelligitur æquationem quadratica altiorem per intersectionem duorum Circulorum construi non posse, propterea quod duo Circuli se mutuo in pluribus quam duobus punctis intersecare nequeunt. Cum igitur eadem æquatio quadratica construi possit per intersectionem Rectæ & Circuli, hæc constructio illi, quæ duos Circulos requirit, merito præfertur, nisi forte in casibus quibusdam singularibus facilis Linearum $a$, $b$, $f$, $g$, $c$ & $h$ determinatio sponte se prodat.

TAB. XXIV. Fig. 100.

493. Intersecetur nunc Circulus a Parabola : sit scilicet, demisso ex Centro Circuli $C$ in Axem $AP$ perpendiculo $CD$, $AD = a$, $CD = b$, & Radius Circuli $CM = c$, erit inter Coordinatas orthogonales $AP = x$, $PM = y$, æquatio pro Circulo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = cc$. Parabolæ vero Axis $FB$ statuatur ad Axem hic assumtum $AP$ normalis : sitque $AE = f$, $EF = g$, & Parameter Parabolæ $= 2h$ ; erit, ex natura Parabolæ, $EP^2 = 2h(EF + PM)$ seu in symbolis $(x - f)^2 = 2h(g + y)$, unde erit $y = \frac{(x-f)^2}{2h} - g$ & $y - b = \frac{(x-f)^2}{2h} - (b + g)$. Qui valor si in priori æquatione substituatur, eliminabitur $y$, eritque

$$\frac{(x-f)^4}{4hh} - \frac{(b+g)(x-f)^2}{h} + (b+g)^2 + (x-a)^2 = cc$$

sive

$$x^4 - 4fx^3 \begin{array}{l}+6ff\\-4h(b+g)\\+4hh\end{array} x^2 \begin{array}{l}-4f^3\\+4fh(b+g)\\-8ahh\end{array} x \begin{array}{l}+f^4\\-4ffh(b+g)\\+4hh(b+g)^2\\+4aahh\\-4cchh\end{array} = 0$$

cujus æquationis radices erunt Abſciſſæ $AP$, $Ap$, $Ap$, $Ap$, unde Applicatæ per interſectionum puncta $M$, $m$, $m$, $m$, tranſeunt. CAP. XX.

494. In hac æquatione ſex inſunt conſtantes $a$, $b$, $c$, $f$, $g$, & $h$; quarum vero binæ $b+g$ pro una ſunt reputandæ, ita ut quinque ſolum, ponendo $b+g=k$, ineſſe cenſendæ ſint. Poſito ſcilicet $CD+EF=b+g=k$, ſequens habebitur æquatio

$$x^4 - 4fx^3 \begin{matrix} +6ff \\ -4hk \\ +4hh \end{matrix} xx \begin{matrix} -4f^3 \\ +4fhk \\ -8ahh \end{matrix} x \begin{matrix} +f^4 \\ -4ffhk \\ +4hhkk \\ +4aahh \\ -4cchh \end{matrix} = 0.$$

Ad hanc autem formam omnis æquatio biquadratica revocari poteſt; ſit enim propoſita hæc æquatio

$$x^4 - \mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}xx - \mathrm{C}x + \mathrm{D} = 0$$

erit, comparatione inſtituta,

$$4f = \mathrm{A} \text{ ſeu } f = \tfrac{1}{4}\mathrm{A}$$

$$6ff - 4hk + 4hh = \mathrm{B}, \text{ ſeu } \tfrac{3}{8}\mathrm{AA} - 4hk + 4hh = \mathrm{B}.$$

unde fit

$$k = \frac{3\mathrm{AA}}{32h} + h - \frac{\mathrm{B}}{4h},$$

$$4f^3 - 4fhk + 8ahh = \mathrm{C}$$

ſive

$$\tfrac{1}{16}\mathrm{A}^3 - \tfrac{3}{32}\mathrm{A}^3 - \mathrm{A}hh + \tfrac{1}{4}\mathrm{AB} + 8ahh = \mathrm{C}$$

ergo

$$a = \frac{\mathrm{A}^3}{256hh} + \frac{\mathrm{A}}{8} - \frac{\mathrm{AB}}{32hh} + \frac{\mathrm{C}}{8hh}.$$

Denique eſt

$$(ff - 2hk)^2 + 4aahh - 4cchh = \mathrm{D}.$$

At eſt

$$ff - 2hk = \frac{B}{2} - 2hh - \frac{AA}{16},$$

&

$2ah = \frac{A^{3}}{128h} + \frac{Ah}{4} - \frac{AB}{16h} + \frac{C}{4h}$, quibus valoribus substitutis emerget æquatio $c$ & $h$ involvens, quas propterea convenientissime inde definiri oportet, ita scilicet ut utraque valorem obtineat realem.

495. Quoniam vero in omni æquatione biquadratica secundus terminus facile tolli potest; ponamus ipsum jam esse sublatum, ideoque construendam esse hanc æquationem

$$x^4 \star + Bxx - Cx + D = 0.$$

Erit ergo primum, $f = 0$; secundo $k = h - \frac{B}{4h}$; tertio $a = \frac{C}{8hh}$; atque, ob $2hk - ff = 2hh - \frac{B}{2}$, & $2ah = \frac{C}{4h}$, quarto $4h^4 - 2Bhh + \frac{1}{4}BB + \frac{CC}{16hh} - 4cchh = D$, unde fit $64cch^4 = CC + 4BBhh - 32Bh^4 + 64h^6 - 16Dhh$; ideoque $8chh = \sqrt{(4hh(B - 4hh)^2 + CC - 16Dhh)}$. Quoniam vero hoc imprimis est efficiendum ut tam $c$ quam $h$ obtineant valores reales, ponatur $c = h - \frac{B+q}{4h}$, eritque

$$CC - 16Dhh + 8Bhhq - 32h^4 q - 4hhqq = 0.$$

Quo igitur quæsito satisfaciamus, duo casus sunt distinguendi, alter quo D est quantitas negativa, alter quo D est quantitas affirmativa. Sit igitur

I.

D quantitas affirmativa $= +EE$, ita ut construi debeat hæc æquatio

$$x^4 \star + Bx^2 - Cx + EE = 0,$$

ponatur ad hoc $q = 0$, ut sit $c = \frac{4hh - B}{4h}$, fietque $hh =$

$\frac{CC}{16EE}$ & $h = \frac{C}{4E}$; unde fit $c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$, & porro $k = c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$; $a = \frac{2EE}{C}$ & $f = o$. CAP. XX.

II.

Sit autem D quantitas negativa, puta $D = -EE$, ut construi debeat hæc æquatio

$$x^4 * + Bx^2 - Cx - EE = o,$$

fiet $64cch^4 = CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh$; quæ æquatio realem pro $c$ valorem præbet, quicquid pro $h$ assumatur: fiet enim $c = \frac{\sqrt{(CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh)}}{8hh}$, atque $h$ pro lubitu assumi potest; quovis igitur casu ita assumatur, ut facilima ipsius $c$ constructio inde consequatur. Quo facto erit, ut ante, $AE = f = o$, $CD + EF = k = \frac{4hh - B}{4h}$ & $AD = a = \frac{C}{8hh}$. Si ponatur $E = o$, orietur constructio æquationis cubicæ

$$x^3 * + Bx - C = o.$$

Hacque constructione nititur regula BACKERI vulgo satis nota.

496. Si sumantur duæ quæcunque Lineæ secundi ordinis seu Sectiones conicæ, quarum æquationes ad communem Axem idemque Abscissarum initium relatæ sint

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = o$$
&
$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = o.$$

Ex quibus, si methodo supra tradita $y$ eliminetur, quod fiet istas æquationes comparando cum illis in §. 479. tractatis, scilicet

$$P + Qy + Ryy = 0$$
&
$$p + qy + ryy = 0,$$

fient P & $p$ Functiones secundi ordinis ipsius $x$, Q & $q$ Functiones primi ordinis, & R & $r$ erunt constantes, unde colligitur æquatio resultans fore biquadratica. Atque adeo per intersectiones duarum quarumvis Sectionum conicarum altioris gradus æquationes construi nequeunt, quam biquadraticæ, quas autem per Circulum & Parabolam construi posse vidimus. Hoc idem vero intelligere licet ex natura Linearum secundi ordinis, quæ a recta Linea in duobus punctis secari possunt; unde duæ rectæ quatuor intersectiones formare poterunt, at duæ Lineæ rectæ junctim consideratæ speciem constituunt Linearum secundi ordinis; unde patet duas Lineas secundi ordinis se mutuo in quatuor punctis intersecare posse.

497. Adhibeantur ad intersectiones efficiendas duæ Lineæ, altera secundi, altera vero tertii ordinis, quæ exprimantur his æquationibus

$$P + Qy + Ryy = 0$$
&
$$p + qy + ryy + sy^3 = 0.$$

Erit ergo P Functio duarum dimensionum ipsius $x$, Q Functio unius dimensionis, & R constans; tum vero $p$ Functio trium dimensionum, $q$ duarum, $r$ unius dimensionis & $s$ constans. Quarum ratio si in æquatione post eliminationem ipsius $y$ orta (480.) habeatur, patebit eam fore ordinis sexti; quare per intersectiones Lineæ tertii ordinis cum Sectione conica altiores æquationes, quam sextæ potestatis construi non poterunt: quod idem ex natura utriusque ordinis patet, cum enim Lineæ tertii ordinis a Linea recta in tribus punctis intersecentur, eædem a duabus rectis, quæ junctim sumptæ speciem Linearum secundi ordinis constituunt, in sex punctis intersecabuntur.

498. Si tam eliminationes supra expositas, quam hoc ratiocinium ab intersectione rectarum petitum, ad altiores ordines transferamus, patebit per intesectiones duarum Linearum tertii ordinis construi posse æquationes nonæ potestatis; per intersectiones duarum Linearum quarti ordinis autem æquationes potestatem sextam decimam non superantes. Atque in genere per duarum Linearum curvarum intersectiones, quarum altera sit ordinis $m$ altera ordinis $n$, construi poterunt omnes æquationes potestatem $mn$ non excedentes. Sic ad æquationem centesimæ potestatis construendam opus erit vel duabus Lineis decimi ordinis, vel duabus, quarum altera sit quinti altera vicesimi ordinis, & ita porro; resolvendo numerum 100. in duos Factores. Quod si autem æquationis construendæ maxima potestas exponatur numero primo, vel alio commodos Factores non admittente, tum in ejus locum alius numerus major Factores habens idoneos substituatur; quibus enim binis Curvis æquationes majoris potestatis construi possunt, iisdem quoque æquationes inferioris cujusque gradus construentur. Sic ad æquationem gradus tricesimi noni adhiberi poterunt duæ Curvæ, altera sexti altera septimi ordinis; quia duabus hujusmodi Curvis æquatio quadragesimi secundi gradus construi potest, hæcque constructio simplicior est censenda, quam si altera Curva ordinis tertii, altera decimi tertii assumeretur.

499. Ex his igitur perspicuum est unamquamque æquationem pluribus, imo innumerabilibus, modis per intersectiones duarum Curvarum ita construi posse, ut ejus radices reales assignentur. Ex quibus infinitis modis eum potissimum eligi conveniet, qui absolvitur Lineis curvis cum simplicissimis tum descriptu facillimis; imprimis vero in id erit incumbendum, ut per intersectiones omnes radices reales exhibeantur; quod obtinetur si ejusmodi Curvæ assumantur, quæ intersectionibus imaginariis careant. Supra autem vidimus hujusmodi intersectionibus imaginariis nullum relinqui locum, si in æquatione pro altera Curva Applicata $y$ æquetur Functioni uniformi ipsius

LIB. II. $x$; tum enim, quia hæc Curva nullas habet Applicatas imaginarias, fieri nequit ut intersectiones imaginariæ oriantur, quotcunque etiam Applicatis imaginariis altera Curva inquinetur. In hoc ergo constructionis negotio alteram Curvam perpetuo ita assumamus, ut ejus æquatio in hac forma $P + Qy = 0$, contineatur, denotantibus P & Q Functiones ipsius $x$.

500. Proposita ergo quacunque æquatione eligatur una quædam conveniens Curva in æquatione $P + Qy = 0$. Et, quoniam æquatio pro altera Curva ita debet esse comparata, ut, si in ea loco $y$ substituatur valor $\frac{-P}{Q}$, ipsa æquatio proposita resultet; ex ipsa proposita vicissim efformari poterit æquatio pro altera Curva, introducendo $y$ loco $\frac{-P}{Q}$. Uti, si proposita fuerit hæc æquatio $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, sumatur Parabola pro altera Curva æquatione $ay = xx + bx$ contenta; ex qua, cum sit $xx = ay - bx$, substituatur iste valor in æquatione proposita, quoties lubet; erit

$$\begin{aligned} x^4 &= aayy - 2abxy + bbxx \\ Ax^3 &= \quad\quad\quad + Aaxy - Abxx \end{aligned}$$

ideoque obtinebitur hujusmodi æquatio secundi ordinis

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb)xx + Cx + D = 0,$$

cujus adeo intersectiones cum Curva $ay = xx + bx$ indicabunt radices æquationis propositæ.

502. Quemadmodum hæ Curvæ ambæ determinandis pro arbitrio constantibus $a$ & $b$ infinitis modis variari possunt, ita multo major adhuc varietas induci potest. Cum enim ex æquatione priori sit $xx - ay + bx = 0$; erit quoque $acxx - aacy + abcx = 0$, quæ si addatur ad posteriorem æquationem, multo latius patens orietur æquatio pro Linea secundi ordinis, cujus intersectiones cum priori radices æquationis propositæ æque indicabunt. Ambæ scilicet istæ Curvæ constructioni inservientes erunt

I.

I.

$$ay = xx + bx$$

II.

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb + ac)xx - aacy + (C + abc)x + D = 0,$$

hæcque poſterior æquatio ita adornari poteſt, ut quamvis Sectionem conicam in ſe complectatur; attendendum ſcilicet eſt ad hanc quantitatem

$$AA - 4B - 4ac,$$

quæ ſi fuerit affirmativa, Curva erit Hyperbola; ſi fuerit $= 0$, Curva erit Parabola; ſin autem ſit quantitas negativa, Curva erit Ellipſis. Circulus vero erit hæc altera Curva ſi fuerit $b = \frac{1}{2}A$, & $aa = B - \frac{1}{4}AA + ac$, ſeu $c = a + \frac{AA}{4a} - \frac{B}{a}$: tum enim æquatio pro eo erit

$$aayy + aaxx - (a^3 + \frac{AAa}{4} - Ba)y + (C + \frac{Aaa}{2} + \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2})x + D = 0,$$

ſeu

$$(y - \frac{a}{2} - \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a})^2 + (x + \frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa})^2 =$$
$$(\frac{a}{2} + \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a})^2 + (\frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa})^2 - \frac{D}{aa},$$

ubi hoc membrum eſt quadratum Radii Circuli.

502. Sic igitur ex ſolis Sectionibus conicis habentur innumerabiles Curvæ, quæ cum Parabola $ay = xx + bx$ deſcriptæ, interſectionibus ſuis radices æquationis propoſitæ præbebunt. Harum ergo Curvarum quæcunque ſumatur, Parabola in iiſdem ſemper punctis interſecabitur; atque ideo illæ Curvæ omnes ſe mutuo in iiſdem punctis ſecabunt. Quocirca ex his Curvis infinitis duas quaſcunque aſſumere licebit, (prætermiſſa Parabola primum aſſumta,) quæ ſi ſuper communi Axe deſcribantur, per interſectiones ſuas radices æquationis propoſitæ ſemper indicabunt. Hocque adeo modo iſta æquatio conſtrui

Lib. II. poterit vel per Circulum & Parabolam, uti ſupra jam vidimus, vel per duas Parabolas, vel per Parabolam & Ellipſin, Hyperbolamve, vel per duas Ellipſes, vel per duas Hyperbolas, vel per Ellipſin cum Hyperbola. Multo magis autem varietas conſtructionum multiplicabitur, ſi etiam Curvæ altiorum ordinum in hunc finem adhiberi velint.

503. Simili modo conſtrui poterunt æquationes altiorum graduum, aſſumendo pro altera Curva Lineam parabolici generis æquatione $y = P$ contentam. Sic, ſi propoſita ſit æquatio conſtruenda

$$x^{12} - f^{10} x^2 + f^9 g x - g^{12} = 0,$$

ſumatur æquatio Parabolica ordinis quarti $x^4 = a^3 y$; &, cum ſit $x^{12} = a^9 y^3$, hoc termino ſubſtuto emerget æquatio pro Linea tertii ordinis

$$a^9 y^3 - f^{10} x^2 + f^9 g x - g^{12} = 0;$$

ex qua, ſi ad eam addatur multiplum quodcunque prioris æquationis $x^4 - a^3 y = 0$, innumerabiles formabuntur Lineæ quarti ordinis, quarum binæ quævis conjunctæ æquationem propoſitam conſtruent.

504. Quod ſi eveniat, ut ex æquatione conſtruenda propoſita non ſatis idonea conſtructio præcedente methodo derivari queat; tum æquatio propoſita multiplicetur per $x$, vel $x^2$, vel $x^3$, vel altiorem quampiam poteſtatem ipſius $x$; ita ut ad ejus radices aliquot inſuper radices evaneſcentes addantur; quæ per interſectiones in ipſo Abſciſſarum initio factas indicabuntur, ideoque a reliquis radicibus veris æquationis propoſitæ facile diſcernentur. Sic igitur æquatio propoſita altioris ſit gradus, hoc tamen non obſtante ſæpenumero commodior conſtructio obtinebitur. Ita, ſi exempli gratia propoſita fuerit æquatio cubica

$$x^3 + Axx + Bx + C = 0;$$

quæ, poſito $xx = ay$, ita ut altera Curva conſtruens futura

ſit Parabola, altera erit ſemper Hyperbola; prodibit enim, loco $xx$ ſubſtituto $ay$ hæc æquatio CAP. XX.

$$axy + Aay + Bx + C = 0;$$

vel, addita æquatione priore $cxx - acy = 0$, naſcetur hæc latius patens

$$axy + cxx + a(A - c)y + Bx + C = 0,$$

quæ quoque perpetuo eſt pro Hyperbola. Quod ſi ergo Circulum vel Ellipſin vel Parabolam adhibere commodius videatur, tum æquatio propoſita multiplicetur per $x$, ut habeatur hæc æquatio

$$x^4 + Ax^3 + Bxx + Cx = 0,$$

quæ, ſi cum æquatione biquadratica ſupra conſtructa compararetur, erit $D = 0$, hæcque æquatio ſemper per Circulum & Parabolam conſtrui poterit.

505. Quoniam ergo omnis æquatio cujuſque gradus per interſectiones duarum Curvarum algebraïcarum conſtrui poteſt, idque infinitis modis, Lineam quamcunque in locum alterius Curvæ ſubſtituere licebit: hincque enata eſt quæſtio, quemadmodum data æquatio ope datæ Curvæ conſtrui queat. Hic autem primum notandum eſt datam Curvam ex eo genere eſſe debere, ut ejus Applicata exprimatur per Functionem uniformem ipſius $x$, ne interſectiones imaginariæ conſtructionem perturbent, Neque enim ſufficeret, ut Curva, vel tantum portio Curvæ propoſita, habeat Abſciſſas uni radici æquationis æquales; quæ conditio, ſi quidem una tantum radix æquationis propoſitæ deſideretur, adjici eſt ſolita; fieri enim poſſet, ut iſte arcus Curvæ nullam patiatur interſectionem, etiamſi Abſciſſa cuipiam ipſius puncto reſpondens ſit vera radix; quoniam hæc radix vel per interſectionem imaginariam; vel per alius rami eidem Abſciſſæ reſpondentis interſectionem

 indicari posset. Quam ob causam huic quæstioni, curiosæ magis quam utili, non immoror, cum vera fundamenta omnium hujusmodi constructionum satis fuse ostenderim.

---

## CAPUT XXI.

### *De Lineis curvis transcendentibus.*

506. Hactenus de Lineis curvis algebraïcis egimus, quæ ita sunt comparatæ, ut, sumtis Abscissis in Axe quocunque, Applicatæ respondentes exprimantur per Functiones algebraïcas Abscissarum; seu, quod eodem redit, in quibus relatio inter Abscissas & Applicatas exprimi possit per æquationem algebraïcam. Hinc itaque sponte sequitur, si valor Applicatæ per Functionem algebraicam Abscissæ explicari nequeat, Lineam curvam algebraïcis annumerari non posse. Hujusmodi autem Lineæ curvæ, quæ algebraïcæ non sunt, *transcendentes* vocari solent. Linea igitur transcendens ita definitur, ut ejusmodi Curva esse dicatur, in qua relatio inter Abscissas & Applicatas æquatione algebraïca exprimi nequeat. Quoties ergo Applicata $y$ Functioni transcendenti ipsius Abscissæ $x$ æquatur, toties Linea curva ad genus transcendentium erit referenda.

507. In superiori Sectione duas potissimum species quantitatum transcendentium evolvimus, quarum altera Logarithmos, altera Arcus circulares seu angulos, complectebatur. Quod si ergo Applicata $y$ sit æqualis vel Logarithmo ipsius Abscissæ $x$, vel Arcui Circuli, cujus sinus, seu cosinus, seu tangens per Abscissam $x$ exprimitur, ita ut sit $y = lx$, vel $y = A.\,sin.\,x$, vel $y = A.\,cos.\,x$, vel $y = A.\,tang.\,x$, vel, si hujusmodi valores tantum in æquationem inter $x$ & $y$ ingrediantur, tum Curva erit transcendens. Sunt autem hæ Curvæ tantum species transcendentium: præter istas enim dantur innumerabiles aliæ ex-

pressiones transcendentes, quarum origo in Analysi infinitorum fusius exponetur, ita ut numerus Curvarum transcendentium longe superet numerum Curvarum algebraicarum. CAP. XXI.

508. Quæcunque Functio non est algebraïca, ea est transcendens: ideoque Curvam, in cujus æquationem ingreditur, reddit transcendentem. Æquatio autem algebraïca, vel est rationalis, nullosque ex ponentes præter numeros integros continet, vel est irrationalis, atque exponentes fractos complectitur; hoc autem posteriori casu semper ad rationalitatem revocari potest. Cujus igitur Curvæ æquatio relationem inter Coordinatas $x$ & $y$ exprimens ita est comparata, ut neque sit rationalis, neque ad rationalitatem perduci possit, ea semper est transcendens. Quod si ergo in æquatione ejusmodi potestates occurrant, quarum exponentes neque sint numeri integri neque fracti, ad rationalitatem nullo modo perduci poterit, ideoque Curvæ talibus æquationibus contentæ erunt transcendentes. Hinc nascitur prima species & quasi simplicissima Curvarum transcendentium, in quarum æquationibus insunt exponentes irrationales; quæ quia neque Logarithmos neque Arcus circulares involvunt: sed ex sola numerorum irrationalium notione nascuntur, magis quodammodo ad Geometriam communem pertinere videntur, & hanc ob rem ab LEIBNITIO *interscendentes* sunt appellatæ, quasi medium tenerent inter algebraïcas & transcendentes.

509. Hujusmodi ergo Curva interscendens erit, quæ continetur æquatione $y = x^{\sqrt{2}}$; quomodocunque enim hæc æquatio potestatibus sumendis evehatur, nunquam ad rationalitatem perducetur. Talis æquatio autem nulla via geometrica construi potest. Geometrice enim nullæ aliæ potestates exhiberi possunt, nisi quarum exponentes sint numeri rationales, hancque ob causam istiusmodi Curvæ ab algebraïcis maxime discrepant. Si enim exponentem $\sqrt{2}$ tantum vero proxime exhibere velimus, ejus loco ponendo aliquam ex his fractio-

 nibus $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{41}{29}$; $\frac{99}{70}$, quæ valorem $\sqrt{2}$ proxime exprimunt, Curvæ quidem algebraïcæ prodibunt ad quæſitam proxime accedentes, at ordinis erunt vel tertii, vel ſeptimi, vel decimi ſeptimi, vel quadrageſimi primi, &c. Quare, cum $\sqrt{2}$ rationaliter exprimi nequeat niſi per fractionem, cujus numerator & denominator ſint numeri infinite magni, hæc Curva ordini Linearum infiniteſimo erit accenſenda, ideoque pro algebraïca haberi non poterit. Huc accedit, quod $\sqrt{2}$ duplicem involvat valorem, alterum affirmativum alterum negativum, ex quo $y$ duplicem perpetuo ſortietur valorem, ſicque gemina Curva reſultabit.

510. Deinde vero ſi hanc Curvam exacte conſtruere velimus, id ſine Logarithmorum beneficio præſtare non poſſumus. Cum enim ſit $y = x^{\sqrt{2}}$, erit, Logarithmis ſumendis, $ly = \sqrt{2}.lx$, cujuſvis ergo Abſciſſæ Logarithmus per $\sqrt{2}$ multiplicatus dabit Logarithmum Applicatæ; unde ad quamvis Abſciſſam $x$ reſpondens Applicata ex canone Logarithmorum aſſignabitur. Sic, ſi fuerit $x = 0$, erit $y = 0$: ſi $x = 1$, erit $y = 1$; qui valores ex æquatione facillime fluunt: at, ſi $x = 2$, erit $ly = \sqrt{2}.l2 = \sqrt{2}.0,3010300$: & ob $\sqrt{2} = 1,41421356$, erit $ly = 0,4257274$, ideoque proxime $y = 2,665186$: & ſi $x = 10$, erit $ly = 1,4142356$, hincque $y = 25,955870$. Hoc igitur modo ad ſingulas Abſciſſas Applicatæ ſupputari, atque adeo Curva conſtrui poterit, ſi quidem Abſciſſæ $x$ valores affirmativi tribuantur. Sin autem Abſciſſa $x$ valores obtineat negativos, tum difficile eſt dictu utrum valores ipſius $y$, futuri ſint reales an imaginarii: ſit enim $x = -1$, & quid ſit $(-1)^{\sqrt{2}}$ definiri non poterit, quoniam approximationes ad valorem $\sqrt{2}$ nihil adjumenti afferunt.

511. Multo minus erit dubitandum, quin æquationes, in quibus adeo exponentes imaginarii reperiuntur, ad genus tranſcendentium referri debeant. Fieri autem omnino poteſt, ut

expressio continens exponentes imaginarios valorem realem atque determinatum exhibeat. Hujus rei exempla supra jam occurrerunt; unde hic sufficiat unum exemplum attulisse hoc CAP. XXI.

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}},$$

in quo, etiamsi utrumque membrum $x^{+\sqrt{-1}}$ & $x^{-\sqrt{-1}}$ sit quantitas imaginaria, tamen summa amborum valorem habet realem. Sit enim $lx = v$, sumto $e$ pro numero, cujus Logarithmus hyperbolicus est $= 1$, erit $x = e^{v}$, quo valore loco $x$ substituto, erit $2y = e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}$. Vidimus autem in Sectione superiori §. 138. esse

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} = cos.\, A.\, v,$$

unde fiet $y = cos.\, A.\, v = cos.\, A.\, lx$. Scilicet, proposito quocunque ipsius $x$ valore in numeris, sumatur ejus Logarithmus hyperbolicus, tum in Circulo, cujus radius $= 1$, abscindatur Arcus isti Logarithmo æqualis, hujusque Arcus cosinus dabit valorem Applicatæ $y$. Sic, si sumatur $x = 2$, ut sit $2y = 2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$, erit $y = cos.\, A.\, l.\, 2 = cos.\, A.\, 0,6931471805599$. Iste autem Arcus ipsi $l\,2$ æqualis, cum Arcus $= 3,1415926535$ &c., contineat $180°$, per regulam auream invenietur fore $39°, 42', 51'', 52''', 9''''$, cujus cosinus est, $0,7692389013540 8$, hicque numerus dat valorem Applicatæ $y$ respondentem Abscissæ $x = 2$. Cum igitur hujusmodi expressiones & Logarithmos & Arcus circulares involvant, jure ad transcendentes referuntur.

512. Inter Curvas ergo transcendentes primum locum tenent, quarum æquationes, præter quantitates algebraïcas

LIB. II. Logarithmos involvunt, atque ſimpliciſſima harum erit quæ continetur hac æquatione $l\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$, ſeu $x = bl\frac{y}{a}$, ubi perinde eſt cujuſnam generis Logarithmi accipiantur, quia multiplicatione conſtantis $b$ omnia Logarithmorum ſyſtemata ad idem revocantur. Denotet ergo character $l$ Logarithmos hyperbolicos, atque Curva æquatione $x = bl\frac{y}{a}$ contenta ſub nomine LOGARITHMICÆ vulgo eſt nota. Sit $e$ numerus, cujus Logarithmus eſt $= 1$, ita ut ſit $e = 2,718281828459045235360 28$, fietque $e^{x:b} = \frac{y}{a}$; ſeu $y = ae^{x:b}$, ex qua æquatione natura Curvæ logarithmicæ facillime cognoſcitur. Si enim loco $x$ ſucceſſive ſubſtituantur valores in arithmetica progreſſione procedentes, Applicatæ $y$ valores tenebunt inter ſe progreſſionem geometricam. Quæ quo facilius ad conſtructionem accommodetur, ponatur $e = m^n$, & $b = nc$, eritque $y = am^{x:c}$, ubi $m$ numerum quemcunque affirmativum unitate majorem ſignificare poteſt. Si igitur ſit

$$x = 0,\ c,\ 2c,\ 3c,\ 4c,\ 5c,\ 6c,\ \&c.$$

erit

$$y = a,\ am,\ am^2,\ am^3,\ am^4,\ am^5,\ am^6,\ \&c.;$$

&, tribuendis ipſi $x$ valoribus negativis, ſi ponatur

$$x = -c,\ -2c,\ -3c,\ -4c,\ -5c,\ \&c.$$

erit

$$y = \frac{a}{m},\ \frac{a}{m^2},\ \frac{a}{m^3},\ \frac{a}{m^4},\ \frac{a}{m^5},\ \&c.$$

TAB. XXIV. Fig. 101. 513. Hinc patet Applicatas $y$ ubique valores habere affirmativos, & quidem in infinitum creſcentes, auctis Abſciſſis $x$ affirmative in infinitum; ex altera autem Axis parte in infinitum

situm decrescentes, ita ut hinc Axis sit Curvæ Asymtota $Ap$. Sumto scilicet $A$ pro Abscissarum initio, erit hoc loco Applicata $AB = a$: &, sumta Abscissa $AP = x$, erit Applicata $PM = y = am^{x:o} = ae^{x:b}$: ideoque $l.\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$. Unde Abscissa $AP$ per constantem $b$ divisa exprimit Logarithmum rationis $\frac{PM}{AB}$. Si Abscissarum initium in alio quocunque Axis puncto $a$ statuatur, æquatio similis manet. Sit enim A $a = f$, ac posita $aP = t$, ob $x = t - f$, erit $y = ae^{(t-f):b} = ae^{t:b}:e^{f:b}$. Vocetur constans $a:e^{f:b} = g$, erit $y = ge^{t:b}$. Hinc, ob $ab = g$, intelligitur fore $\frac{aP}{b} = l.\frac{PM}{ab}$; ideoque ductis duabus quibusvis Applicatis $PM$ & $pm$, intervallo $Pp$ a se invicem distantibus, erit $\frac{Pp}{b} = l.\frac{PM}{pm}$, & constans $b$, a qua ista relatio pendet, erit instar Parametri Logarithmicæ.

514. Tangens hujus Curvæ logarithmicæ in quovis puncto $M$ etiam facile poterit definiri. Cum enim, posita $AP = x$, sit $PM = ae^{x:b}$, ducatur alia quæcunque Applicata $QN$, a priori intervallo $PQ = u$ dissita, eritque $QN = ae^{(x+u):b} = ae^{x:b}.e^{u:b}$; &, ducta $ML$ Axi parallela, erit $LN = (QN - PM) = ae^{x:b}(e^{u:b} - 1)$. Per puncta $M$ & $N$ ducatur recta $NMT$ Axi occurrens in puncto $T$, erit $LN:ML = PM:PT$, hincque $PT = u:(e^{u:b} - 1)$. Verum, uti in Sectione superiori ostendimus, per Seriem infinitam est $e^{u:b} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} +$ &c.: ideoque $PT =$

$\frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{u}{2b^2} + \frac{uu}{6b^3} + \&c.}$. Evanescat jam intervallum $PQ = u$; &, ob puncta $M$ & $N$ coincidentia, recta $NMT$ fiet Curvæ Tangens, eritque tum Subtangens $PT = b$, ideoque constans; quæ est proprietas palmaria Curvæ logarithmicæ. Parameter ergo Logarithmicæ $b$ simul ejusdem est Subtangens constantis ubique magnitudinis.

515. Quæstio hic oritur, utrum hoc modo tota Curva logarithmica sit descripta; & an ea, præter hunc ramum $MBm$ utrinque in infinitum excurrentem, nullas alias habeat partes. Vidimus enim supra nullam dari Asymtotam, ad quam non duo rami convergant. Statuerunt ergo nonnulli, Logarithmicam ex duabus constare partibus similibus ad utramque Axis partem sitis, ita ut Asymtota simul futura sit Diameter. Verum æquatio $y = a e^{x:b}$ hanc proprietatem minime ostendit; quoties enim est $\frac{x}{b}$ vel numerus integer, vel fractio denominatorem habens imparem, tum $y$ unicum habet valorem realem eumque affirmativum. Quod si autem fractio $\frac{x}{b}$ habeat denominatorem parem, tum Applicata $y$ geminum induet valorem, alterum affirmativum alterum negativum, hicque Curvæ punctum ad alteram Asymtotæ partem exhibebit: ex quo Logarithmica infra Asymtotam innumerabilia habebit puncta discreta, quæ Curvam continuam non constituunt, etiamsi ob intervalla infinite parva Curvam continuam mentiantur; quod est paradoxon in Lineis algebraïcis locum nullum inveniens. Hinc etiam aliud oritur paradoxon multo magis mirandum. Cum enim numerorum negativorum Logarithmi sint imaginarii, (quod tum per se patet, tum inde intelligitur quod $log. -1$ ad $\sqrt{-1}$ rationem habeat finitam) erit $l. -n$, quantitas imaginaria, quæ sit $= i$: at, cum Logarithmus quadrati æquetur duplo Logarithmo radicis, erit $l.(-n)^2 = l.\,n^2 =$

$2\,i$. At, *log.* $n^2$ eſt quantitas realis, $= 2\,l.\,n$ : unde ſequitur, & quantitatem realem $l.\,n$ & imaginariam $i$ fore ſemiſſem ejuſdem quantitatis realis $l.\,n^2$. Hinc porro quilibet numerus duplicem habiturus eſſet ſemiſſem, alteram realem alteram imaginariam; ſimiliterque cujuſque numeri triplex daretur triens, quadruplex quadrans, & ita porro, quarum tamen partium, unica tantum ſit realis, quæ quomodo cum ſolita quantitatum notione conciliari queant, non liquet. CAP. XXI.

516. Conceſſis ergo his quæ aſſumſimus, ſequeretur numeri $a$ ſemiſſem fore æque $\frac{a}{2} + l. -1$, ac $\frac{a}{2}$ : illius enim duplum eſt $a + 2\,l. -1 = a + l.\,(-1)^2 = a + l.\,1 = a$ : ubi notandum eſt eſſe $+\,l. -1 = -\,l. -1$, etiamſi non ſit $l. -1 = 0$ : cum enim ſit $-1 = \frac{+1}{-1}$, erit $l. -1 = l. +1 - l. -1 = -\,l. -1$. Simili modo, cum ſit $\sqrt[3]{1}$ non ſolum 1 ſed etiam $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, erit $3\,l.\,\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = l.\,1 = 0$, ideoque ejuſdem quantitatis $a$ trientes erunt $\frac{a}{3}$; $\frac{a}{3} + l.\,\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, & $\frac{a}{3} + l.\,\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$; tripla enim harum ſingularum expreſſionum producunt eandem quantitatem $a$. Ad hæc dubia ſolvenda, quæ nullo modo admitti poſſe videntur, aliud ſtatui oportet paradoxon : ſcilicet, cujuſque numeri infinitos dari Logarithmos, inter quos plus uno reali non detur. Sic, etſi Logarithmus unitatis eſt $= 0$, tamen præterea innumerabiles alii unitatis dantur Logarithmi imaginarii : qui ſunt $2\,l. -1$, $3\,l.\,\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, $4\,l. -1$; & $4\,l. \pm \sqrt{-1}$, innumerabileſque alii, quos extractio radicum monſtrat. Hæc autem ſententia multo eſt veriſimilior, quam ſuperior : poſito enim $x = l.\,a$, erit $a = e^x$; ideoque $a = 1 + x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \&c.$; quæ, cum ſit æquatio

infinitarum dimensionum, mirum non est si $x$ habeat radices infinitas. Quanquam autem sic posterius paradoxon resolvimus, tamen prius suam vim retinet, qua ad Logarithmicam infra Axem innumerabilia puncta discreta pertinere ostendimus.

517. Multo evidentius autem hujusmodi infinitorum punctorum discretorum existentia monstrari potest, per hanc æquationem $y = (-1)^x$: quoties enim $x$ est numerus, vel integer par vel fractus habens numeratorem parem, erit $y = 1$: sin autem $x$ sit numerus vel integer impar vel fractus, cujus tam numerator quam denominator sint numeri impares, erit $y = -1$, reliquis casibus omnibus, quibus vel $x$ est fractio denominatorem parem habens, vel adeo numerus irrationalis, valor ipsius $y$ erit imaginarius. Æquatio ergo $y = (-1)^x$ exhibebit innumerabilia puncta discreta ad utramque Axis partem intervallo $= 1$ posita, quorum ne bina quidem sunt contigua, hoc tamen non obstante, quæque bina ad eandem Axis partem sita, sibi tam erunt propinqua, ut intervallum sit data quavis quantitate assignabili minus. Inter duos enim Abscissæ valores quantumvis propinquos, non solum una sed infinitæ fractiones exhiberi possunt, quarum denominatores sint impares, ex his autem singulis nascuntur puncta ad æquationem propositam pertinentia: mentientur ergo hæc puncta duas Lineas rectas Axi parallelas ab eo utrinque intervallo $= 1$ dissitas, in his enim Lineis nullum intervallum exhiberi potest in quo non unum, imo infinita puncta, æquatione $y = (-1)^x$ contenta, assignari queant. Hæc eadem anomalia usuvenit in æquatione $y = (-a)^x$, aliisque huic similibus, ubi quantitas negativa ad exponentem indeterminatum elevatur. Hujusmodi ergo paradoxa, quæ in Curvis tantum transcendentibus locum habere possunt, hic exposuisse necesse erat.

518. Ad hoc ergo genus Curvarum a Logarithmis pendentium pertinent omnes æquationes, in quibus non solum Logarithmi occurrunt, sed etiam exponentes variabiles, quippe qui a Logarithmis ad numeros progrediendo oriuntur, unde istæ Curvæ etiam *exponentiales* vocari solent. Hujusmodi ergo Curva erit, quæ in hac æquatione $y = x^x$, seu $ly = xlx$ continetur. Posito ergo $x = 0$, erit $y = 1$; si $x = 1$, erit $y = 1$; si $x = 2$, erit $y = 4$; si $x = 3$, erit $y = 27$, &c. Unde $BDM$ exprimet formam hujus Curvæ ad Axem $AP$ relatæ, ita ut, sumta $AC = 1$, sit $AB = CD = 1$. Intra $A$ & $C$ autem Applicatæ erunt unitate minores; si enim sit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071068$: minima vero erit Applicata si capiatur Abscissa $x = \frac{1}{e} = 0,36787944$, fietque tum Applicata $y = 0,6922005$, uti in sequentibus docebitur. Quemadmodum autem hæc Curva ultra $B$ sit comparata ut videamus, Abscissa $x$ facienda est negativa, eritque $y = \frac{1}{(-x)^x}$, unde illa pars ex meris punctis discretis constabit, ad Axem tanquam Asymtotam convergentibus. Cadent autem hæc puncta ad utramque Axis partem, prout $x$ fuerit numerus vel par vel impar. Quin etiam infra Axem $AP$ infinita hujusmodi puncta cadent, si pro $x$ sumatur fractio denominatorem habens parem; posito enim $x = \frac{1}{2}$, erit & $y = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Curva ergo continua $MDB$ in $B$ subito terminatur, contra indolem Linearum algebraïcarum: loco continuationis autem habebit puncta illa discreta; unde realitas istorum punctorum quasi conjugatorum eo luculentius perspicitur. Nisi enim hæc adesse concedantur, statui deberet, totam Curvam in puncto $B$ subito cessare, id quod esset legi continuitatis contrarium, ideoque absurdum.

CAP. XXI.

TAB. XXIV. Fig. 102.

519. Inter infinitas alias hujus generis Curvas, quarum conſ-

LIB. II. tructio per Logarithmos effici potest, dantur ejusmodi, quarum constructio non tam facile patet, quæ tamen ope idoneæ substitutionis absolvi queat. Talis est Curva æquatione $x^y = y^x$ contenta; ex qua quidem statim perspicitur, Applicatam $y$ perpetuo æqualem esse Abscissæ $x$, ita ut recta ad Axem sub angulo semirecto inclinata æquationi satisfaciat. Interim tamen manifestum est hanc æquationem latius patere, quam æquationem pro recta $y = x$; neque igitur hanc vim æquationis $x^y = y^x$ exhaurire: satisfieri enim huic æquationi potest, etiamsi non sit $x = y$; quoniam, si $x = 2$, etiam esse potest

TAB. XXV. *Fig.* 103. $y = 4$. Præter rectam ergo $EAF$, æquatio proposita alias complectetur partes; ad quas inveniendas, ideoque ad totam Lineam æquatione contentam exhibendam, ponamus $y = tx$, ut sit $x^{tx} = t^x x^x$: unde, radice potestatis $x$ extrahenda, erit $x^t = tx$ & $x^{t-1} = t$; ideoque habebitur $x = t^{\frac{1}{t-1}}$ & $y = t^{\frac{t}{t-1}}$. Vel, posito $t - 1 = \frac{1}{u}$, erit $x = (1 + \frac{1}{u})^u$ & $y = (1 + \frac{1}{u})^{u+1}$. Hinc Curva, præter rectam $EAF$, habebit ramum $RS$ ad rectas $AG$ & $AH$, tanquam Asymtotas, convergentem, cujus recta $AF$ erit Diameter. Secabit autem Curva rectam $AF$ in puncto $C$ ita ut sit $AB = BC = e$, denotante $e$ numerum cujus Logarithmus est unitas. Insuper autem æquatio suppeditat innumerabilia puncta discreta, quæ cum recta $EF$, & Curva $RCS$ æquationem exhauriunt. Hinc ergo innumerabilia binorum numerorum $x$ & $y$ paria exhiberi possunt ut sit $x^y = y^x$, tales enim numeri in rationalibus erunt

$$x = 2 \qquad y = 4$$
$$x = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} \qquad y = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$
$$x = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} \qquad y = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81}$$
$$x = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256} \qquad y = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024}$$
&c. &c.

horum ſcilicet binorum numerorum alter ad alterum elevatus eandem quantitatem producit : ſic erit

$$2^4 = 4^2 = 16$$
$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}$$
$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} = \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}}$$
&c.

520. Quanquam in his ſimilibuſque aliis Curvis infinita puncta algebraïce poſſunt determinari, minime tamen Curvis algebraïcis annumerari poſſunt, quoniam innumerabilia alia extant puncta, quæ algebraïce nullo modo exhiberi poſſunt. Tranſeamus ergo ad alterum Curvarum tranſcendentium genus, quod Arcus circulares requirit : hic autem perpetuo radium Circuli, cujus Arcus conſtructionem ingrediuntur, unitate exprimo, ne pluribus characteribus calculus perturbetur. Curvas autem ad hoc genus pertinentes non eſſe algebraïcas facile oſtendi poteſt, etiamſi impoſſibilitas quadraturæ Circuli nondum ſit evicta. Conſideremus enim ſimpliciſſimam tantum hujus generis æquationem hanc $\frac{y}{a} = A.\,fin.\,\frac{x}{c}$; ita ut Applicata $y$ ſit proportionalis Arcui Circuli, cujus Sinus eſt $\frac{x}{c}$. Quoniam enim eidem Sinui $\frac{x}{c}$ innumerabiles Arcus conve-

LIB. II. niunt, Applicata $y$ erit Functio infinitinomia; ideoque tam ipsa quam aliæ rectæ Curvam in infinitis punctis secabunt, quæ proprietas istam Curvam ab algebraïcis clarissime distinguit. Sit $s$ minimus Arcus sinui $\frac{x}{c}$ conveniens, & denotet $\pi$ semicircumferentiam Circuli, erunt valores ipsius $\frac{y}{a}$ sequentes

$$s;\ \pi - s;\quad 2\pi + s;\quad 3\pi - s;\quad 4\pi + s;\quad 5\pi - s;\ \&c.$$
$$-\pi - s;\ -2\pi + s;\ -3\pi - s;\ -4\pi + s;\ -5\pi - s;\ \&c.$$

TAB. XXV. Fig. 104. Sumta ergo recta $CAB$ pro Axe, & $A$ pro Abscissarum principio; erunt primo, posito $x = 0$, Applicatæ $AA^1 = \pi a$, $AA^2 = 2\pi a$, $AA^3 = 3\pi a$; &c. Itemque ex altera parte $AA^{-1} = \pi a$, $AA^{-2} = 2\pi a$, $AA^{-3} = 3\pi a$, &c.: atque per singula hæc puncta Curva transibit. Sumta vero Abscissa $AP = x$, Applicata Curvam in infinitis punctis $M$ secabit, eritque $PM^1 = as$, $PM^2 = a(\varpi - s)$, $PM^3 = a(2\varpi + s)$, &c. Curva ergo tota ex infinitis portionibus $AE^1A^1$; $A^1F^1A^2$; $A^2E^2A^3$; $A^3F^3A^4$; &c., similibus erit composita; ita ut singulæ rectæ Axi $BC$ parallelæ, quæ per puncta $E$ & $F$ ducuntur, futuræ sint Curvæ diametri. Erit vero $AC = AB = c$, & intervalla $E^1E^2$, $E^2E^3$, $E^1E^{-1}$, $E^{-1}E^{-2}$, itemque $F^1F^2$, $F^1F^{-1}$, $F^{-1}F^{-2}$, erunt singula æqualia $2a\varpi$. Curva hæc a LEIBNITIO est vocata *Linea Sinuum*, quoniam ejus ope cujusque Arcus sinus facile invenitur. Cum enim sit $\frac{y}{a} = A.\ \mathit{sin}.\ \frac{x}{c}$, erit vicissim $\frac{x}{c} = \mathit{sin}.\ A.\ \frac{y}{a}$. Si ponatur $\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\pi - \frac{t}{a}$, fiet $\frac{x}{c} = \mathit{cos}.\ A.\ \frac{t}{a}$; sicque simul habetur *Linea Cosinuum*.

521. Simili modo ex hac consideratione oritur *Linea Tangentium*, cujus æquatio erit $y = A.\ \mathit{tang}.\ x$, positis brevitatis ergo $a = 1$ & $c = 1$; hinc ergo convertendo fit $x = \mathit{tang}.\ A.\ y = \frac{\mathit{sin}.\ y}{\mathit{cos}.\ y}$, cujus Curvæ figura facile ex natura Tangentium colligitur.

colligitur. Habebit autem infinitas Asymtotas inter se parallelas. Pari modo describi poterit *Linea Secantium* ex æquatione $y = \text{A.} sec. x$, seu $x = sec. \text{A.} y = \frac{1}{cos. y}$, quæ etiam infinitos ramos habet in infinitum excurrentes. Maxime vero ex hoc Curvarum genere innotuit CYCLOIS, seu *Trochois*, quæ describitur a puncto in peripheria Circuli super linea recta rotando progredientis, cujus æquatio inter Coordinatas orthogonales est $y = \surd(1 - xx) + \text{A.} cos. x$. Curva hæc, cum ob descriptionis facilitatem tum ob plurimas, quibus gaudet, insignes proprietates, maxime est notatu digna. Quoniam autem pleræque sine Analysi infinitorum explicari nequeunt, hic tantum præcipuas, quæ ex descriptione immediate fluunt, breviter perpendamus. CAP. XXI.

522. Rotetur ergo Circulus $ACB$ super recta $EA$; atque, ut investigatio latius pateat, non punctum Peripheriæ $B$ sed punctum Diametri productæ $D$ quodcumque describat Lineam curvam $Dd$. Sit hujus Circuli radius $CA = CB = a$, distantia $CD = b$, atque in hoc quidem situ punctum $D$ locum obtineat summum. Pervenerit inter rotandum Circulus in situm $aQbR$; ac, posito spatio $AQ = z$ erit Arcus $aQ = z$, qui divisus per radium $a$ dabit angulum $acQ = \frac{z}{a}$, & punctum describens erit in $d$, ut sit $cd = b$, angulus $dcQ = \pi - \frac{z}{a}$; & $d$ erit punctum in Curva quæsita. Ducatur ex $d$ primum in rectam $AQ$ normalis $dp$, tum in rectam $QR$ normalis $dn$; erit $dn = b. fin. \frac{z}{a}$ & $cn = - b. cof. \frac{z}{a}$: ergo $Qn = dp = a + b. cof. \frac{z}{a}$. Producatur $dn$ donec rectæ $AD$ occurrat in $P$; ac vocentur Coordinatæ $DP = x$, $Pd = y$; erit $x = b + cn$; seu $x = b - b. cof. \frac{z}{a}$, & $y = AQ + dn = z + b. fin. \frac{z}{a}$. Cum igitur TAB. XXV. Fig. 105.

 sit $b.\ cos.\ \frac{z}{a} = b - x$, erit $b.\ sin.\frac{z}{a} = \sqrt{(2bx - xx)}$ & $z = a\ \text{A}.\ cos.\ (1 - \frac{x}{b}) = a\ \text{A}.\ sin.\ \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$ ; quibus valoribus substitutis, erit $y = \sqrt{(2bx - xx)} + a\text{A}.\ sin.\ \frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$.
Vel, si Abscissæ in Axe $AD$ a Centro computentur voceturque $b - x = t$, erit, $\sqrt{(2bx - xx)} = \sqrt{(bb - tt)}$, & inter $t$ & $y$ habebitur æquatio ista

$$y = \sqrt{(bb - tt)} + a\ \text{A}.\ cos.\ \frac{t}{b},$$

quæ æquatio dat Cycloidem *ordinariam*, si fuerit $b = a$; sin autem sit vel $b$ major quam $a$, vel $b$ minor quam $a$, Curva vocatur Cyclois vel *curtata* vel *elongata*. Semper autem erit $y$ Functio infinitiplex ipsius $x$, vel $t$; seu, quælibet recta basi $AQ$ parallela Curvam in infinitis punctis secabit, nisi ejus distantia $x$ vel $t$ fuerit tanta, ut $\sqrt{(2bx - xx)}$ vel $\sqrt{(bb - tt)}$ fiat imaginaria quantitas.

TAB. XXVI. Fig. 106. 523. Inter Curvas hujus generis, quæ imprimis sunt cognitæ, referri debent *Epicycloides* & *Hypocycloides*, quæ oriuntur si Circulus $ACB$ super Peripheria alterius Circuli $OAQ$ rotatur, intereaque punctum quodpiam $D$, vel extra vel intra Circulum mobilem sumtum, Curvam $Dd$ describit. Ponatur Circuli immoti radius $OA = c$, radius Circuli mobilis $CA = CB = a$, & distantia puncti describentis $CD = b$; sumatur autem recta $OD$ pro Axe Curvæ quæsitæ $Dd$. A situ hoc initiali, quo puncta $O$, $C$, $D$ in directum jacent, processerit Circulus mobilis in situm $QcR$, descripto Arcu $AQ = z$, ita ut sit angulus $AOQ = \frac{z}{c}$. Erit ergo Arcus $Qa = AQ = z$; hincque angulus $acQ = \frac{z}{a} = Rcd$: &, sumta recta $cd = CD = b$, erit $d$ punctum in Curva $Dd$. Ex eo in Axem demittatur perpendiculum $dP$; itemque ex $c$

perpendiculum $cm$ & $cn$ parallela Axi $OD$. Ergo, ob angulum $Rcn = AOQ = \frac{z}{c}$, erit angulus $dcn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}$. Unde obtinetur $dn = b.\,fin.\frac{(a+c)z}{ac}$, & $cn = b.\,cof.\frac{(a+c)z}{ac}$. Deinde, ob $OC = Oc = a + c$, erit $cm = (a+c).\,fin.\frac{z}{c}$, & $Om = (a+c).\,cof.\frac{z}{c}$. Vocatis ergo Coordinatis $OP = x$, & $Pd = y$, erit $x = (a+c).\,cof.\frac{z}{c} + b.\,cof.\frac{(a+c)z}{ac}$, & $y = (a+c).\,fin.\frac{z}{c} + b.\,fin.\frac{(a+c)z}{ac}$. Hinc patet, fi $\frac{a+c}{a}$ fuerit numerus rationalis, tum ob commenfurabilitatem angulorum $\frac{z}{c}$ & $\frac{(a+c)z}{ac}$, ipfam incognitam $z$ eliminari, ideoque æquationem algebraïcam inter $x$ & $y$ inveniri poffe. Reliquis cafibus Curva hoc modo defcripta erit tranfcendens. CAP. XXI.

Ceterum hic notandum eft, fi fumatur $a$ negativum, tum Hypocycloidem effe prodituram, Circulo mobili intra Circulum immobilem cadente. Vulgo quidem $b$ ftatuitur Radio $a$ æqualis; ficque Epicycloides & Hypocycloides proprie fic dictæ refultant. Hic igitur inventæ Curvæ latius patent; &, quia æquationes non funt difficiliores, hanc conditionem adjicere vifum eft. Si quadrata $xx$ & $yy$ addantur, erit $xx + yy = (a+c)^2 + b^2 + 2b(a+c).\,cof.\frac{z}{a}$, cujus æquationis ope eliminatio ipfius $z$ eo facilius expedietur, quoties quidem quantitates $a$ & $c$ fuerint commenfurabiles.

524. Præter cafus, quibus amborum Circulorum radii $a$ & $c$ funt inter fe commenfurabiles, Curvæque fiunt algebraïcæ, notari meretur ifte quo $b = -a - c$; feu, quo punctum Curvæ $D$ in Centrum Circuli immobilis $O$ incidit. Sit igitur $b = -a - c$; eritque $xx + yy = 2(a+c)^2(1 - cof.\frac{z}{a})$

$=4(a+c)^2(\cos.\frac{z}{2a})^2$; unde fiet $\cos.\frac{z}{2a}=\frac{\sqrt{(xx+yy)}}{2(a+c)}$. Deinde, cum sit $x=(a+c)(\cos.\frac{z}{c}-\cos.\frac{(a+c)z}{ac})$ & $y=(a+c)(\sin.\frac{z}{c}-\sin.\frac{(a+c)z}{ac})$, erit $\frac{x}{y}=-\tang.\frac{(2a+c)z}{2ac}$ & $\sin.\frac{(2a+c)z}{2ac}=\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$; atque $\cos.\frac{(2a+c)z}{2ac}=\frac{-y}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Quare, cum sit $\sqrt{(xx+yy)}=2(a+c)\cos.\frac{z}{2a}$, fiet $x=2(a+c).\cos.\frac{z}{2a}.\sin.\frac{(2a+c)z}{2ac}$, & $y=-2(a+c).\cos.\frac{z}{2a}.\cos.\frac{(2a+c)z}{2ac}$. Sit, exempli gratia, $c=2a$; erit $x=6a.\cos.\frac{z}{2a}.\sin.\frac{z}{a}$, & $y=-6a.\cos.\frac{z}{2a}.\cos.\frac{z}{a}$, & $\sqrt{(xx+yy)}=6a.\cos.\frac{z}{2a}$. Ponamus $\cos.\frac{z}{2a}=q$, erit $\sin.\frac{z}{2a}=\sqrt{(1-qq)}$, & $\sin.\frac{z}{a}=2q\sqrt{(1-qq)}$, atque $\cos.\frac{z}{a}=2qq-1$: unde fit $q=\frac{\sqrt{(xx+yy)}}{6a}$, & $y=-6aq(2qq-1)=(1-2qq)\sqrt{(xx+yy)}=(1-\frac{xx+yy}{18aa})\sqrt{(xx+yy)}$; seu, $18aay=(18aa-xx-yy)\sqrt{(xx+yy)}$. Ponatur $18aa=ff$; &, sumtis quadratis, habebitur ista æquatio sexti ordinis $(xx+yy)^3-2ff(xx+yy)^2+f^4xx=0$. Quoniam vero hic nobis est propositum non Curvas algebraïcas sed transcendentes contemplari, his missis ad ejusmodi Curvas progrediamur, quarum constructio simul tam Logarithmos quam Arcus circulares requirat.

TAB. XXVI. Fig. 107.

525. Supra vero jam ejusmodi nacti sumus Curvam ex æquatione $2y=x^{+\sqrt{-1}}+x^{-\sqrt{-1}}$, quam transmutavimus in hanc $y=\cos.A.lx$. Hæc vero ulterius abit in $A.\cos.y=lx$, & $x=e^{A.\cos.y}$. Sumta ergo recta $AP$ pro Axe, in eoque $A$ pro initio Abscissarum, primo patet ultra $A$ in re-

gione Abſciſſarum negativarum Curvæ nullam dari portionem continuam, Axis autem $AP$ a Curva in infinitis punctis $D$ interſecabitur, quorum punctorum ab $A$ diſtantiæ progreſſionem geometricam conſtituent, erit ſcilicet $AD = e^{\frac{\pi}{2}}$; $AD' = e^{\frac{3\pi}{2}}$; $AD'' = e^{\frac{5\pi}{2}}$; $AD''' = e^{\frac{7\pi}{2}}$; &c., tum vero dabuntur infinitæ interſectiones ad $A$ propius accedentes, $AD^{-1} = e^{\frac{-\pi}{2}}$, $AD^{-2} = e^{\frac{-3\pi}{2}}$, $AD^{-3} = e^{\frac{-5\pi}{2}}$ &c. Deinde hæc Curva utrinque ad Axem excurret ad diſtantias $AB = AC = 1$, ibique rectas Axi parallelas tanget in infinitis punctis $E$ & $F$, quorum diſtantiæ a $B$ & $C$ pariter progreſſionem geometricam conſtituent. Infinitis ergo flexibus Curva ad rectam $BC$ accedet, atque tandem cum ea prorſus confundetur. Singularis ergo hujus Curvæ proprietas in hoc conſiſtit, quod non recta infinita ſed finita $BC$ Curvæ ſit Aſymtota, quo ipſo hujus Curvæ indoles ab algebraïcis maxime diſtinguitur.

526. Ad Curvas tranſcendentes, quarum conſtructio angulos, vel ſolos vel cum Logarithmis conjunctos, requirit, referri quoque debent innumerabiles SPIRALIUM ſpecies. Reſpiciunt autem Spirales punctum quodpiam fixum $C$ tanquam Centrum, circa quod plerumque infinitis ſpiris circumducuntur. Natura harum Curvarum commodiſſime explicatur per æquationem inter cujuſque Curvæ puncti $M$ a Centro $C$ diſtantiam $CM$ & angulum $ACM$, quem hæc recta $CM$ cum recta poſitione data $CA$ conſtituit. Sit ergo angulus $ACM = s$; ſeu, ſit $s$ Arcus Circuli radio $= 1$ deſcripti, qui ſit anguli $ACM$ menſura, ac ponatur recta $CM = z$. Quod, ſi nunc detur æquatio quæcunque inter variabiles $s$ & $z$, Curva reſultabit ſpiralis. Cum enim angulus $ACM$, præter $s$, infinitis modis exprimi queat; quoniam anguli $2\varpi + s$, $4\varpi + s$, $6\pi + s$, &c., item $-2\varpi + s$, $-4\pi + s$, &c., eandem poſitionem rectæ $CM$ exhibent, his valoribus loco $s$

TAB. XXVI. Fig. 108.

LIB. II. in æquatione substitutis, distantiæ $CM$ infinitos diversos obtinebit valores, ideoque recta $CM$ producta Curvam in infinitis punctis secabit, nisi ex his valoribus quantitas $z$ fiat imaginaria. Incipiamus ergo a casu simplicissimo, quo est $y = as$; eruntque pro eadem rectæ $CM$ positione valores ipsius $y$ isti $a(2\pi + s)$, $a(4\pi + s)$, $a(6\pi + s)$ &c., itemque $-a(2\pi - s)$, $-a(4\pi - s)$, $-a(6\pi - s)$, &c. Quin etiam si pro $s$ ponatur $\pi + s$, eadem rectæ $CM$ manebit positio, præterquam quod valor ipsius $z$ capi debeat negative: hinc ad valores ipsius $z$ assignatos, addi oportet hos $-a(\pi + s)$, $-a(3\pi + s)$, $-a(5\pi + s)$, &c.: prætereaque istos $a(\pi - s)$; $a(3\pi - s)$; $a(5\pi - s)$, &c. Curvæ ergo hujus forma erit talis, qualis in figura ad marginem allegata repræsentatur; rectam scilicet $AC$ in $C$ tangit, hincque duobus ramis, utrinque infinitis gyris Centrum $C$ ambientibus & se mutuo in recta $BC$ ad $AC$ normali perpetuo decussantibus, in infinitum extenditur; eritque recta $BCB$ ejus Diameter. Vocari autem hæc Curva ab inventore solet *Spiralis Archimedea*; atque, si semel est exacte descripta, inservit ad quemvis angulum in quotcunque partes secandum, uti ex ejus æquatione $z = as$ sponte patet.

TAB. XXVII. Fig. 109.

527. Quemadmodum æquatio $z = as$, quæ, si $z$ & $s$ essent Coordinatæ orthogonales, foret pro Linea recta, præbuit Spiralem Archimedeam; ita si aliæ æquationes algebraïcæ inter $z$ & $s$ accipiantur, infinitæ aliæ prodibunt Lineæ spirales, si quidem æquatio ita sit comparata, ut singulis ipsius $s$ valoribus respondeant valores reales ipsius $z$. Ita, hæc æquatio $z = \frac{a}{s}$, quæ similis est æquationi pro Hyperbola ad Asymtotas relata, præbet spiralem, quæ a Cel. *Johanne* BERNOULLIO vocata est Spiralis Hyperbolica; atque, postquam ex Centro $C$ infinitis gyris exiisset, tandem in distantia infinita ad rectam $AA$ tanquam Asymtotam accedit. Quod si proponatur æquatio $z = a\sqrt{s}$; angulis $s$ negative sumtis nulla respondebit distantia realis $z$; valoribus autem affirmativis sin-

gulis ipsius $s$ gemini valores ipsius $z$ respondebunt, alter affirmativus alter negativus: spiræ tamen circa $C$ absolventur infinitæ. Sin autem æquatio inter $z$ & $s$ fuerit hujusmodi $z = a\sqrt{(nn - ss)}$, variabilis $z$ nullum habebit valorem realem nisi $s$ contineatur intra hos limites $+n$ & $-n$; ideoque hoc casu Curva erit finita. Scilicet, si ad Axem $ACB$ per Centrum $C$ utrinque inclinentur rectæ $EF$, $EF$, cum Axe angulum $= n$ constituentes, hæ erunt Curvæ sese in $C$ decussantis tangentes, ipsaque Curva habebit Lemniscatæ formam $ACBCA$. Simili autem modo innumerabiles aliæ obtinebuntur Linearum transcendentium formæ, quas evolvere nimis foret prolixum.

CAP. XXI.

TAB. XXVII. Fig. 110.

518. Hæc tractatio porro in immensum amplificari posset, si inter $z$ & $s$ non æquationes algebraïcæ sed adeo transcendentes accipiantur. Ex quo genere præ reliquis notari meretur ea Linea curva, quæ hac æquatione $s = n\,l.\frac{z}{a}$ exprimitur; in qua scilicet anguli $s$ sont Logarithmis distantiarum $z$ proportionales; ob quam caussam hæc Curva *Spiralis Logarithmica* appellatur, atque ob plurimas insignes proprietates maxime est nota. Hujus Curvæ primaria proprietas est, quod omnes rectæ ex Centro $C$ eductæ Curvam sub æqualibus angulis intersecent. Ad eam ex æquatione educendam, sit angulus $ACM = s$, & recta $CM = z$, eritque $s = n\,l.\frac{z}{a}$ & $z = ae^{\frac{s}{n}}$; tum capiatur angulus major $ACN = s + v$, erit recta $CN = ae^{\frac{s}{n}}e^{\frac{v}{n}}$, ideoque Centro $C$ descripto Arcu $ML$, qui erit $= zv$, fiet $LN = ae^{\frac{s}{n}}(e^{\frac{v}{n}} - 1) = ae^{\frac{s}{n}}\left(\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \text{\&c.}\right)$. Hinc erit, $\frac{ML}{LN} =$

TAB. XXVII. Fig. 111.

$$\frac{v}{\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \&c.} = \frac{n}{1 + \frac{v}{2n} + \frac{v^2}{6nn} + \&c.}$$. At evanescente angulorum differentia $MCN = v$, fiet $\frac{ML}{LN}$ tangens anguli, quem Radius $CM$ cum Curva conſtituit; unde, facto $v = 0$, iſtius anguli $AMC$ tangens erit $= n$, ideoque iſte angulus conſtans. Si fuerit $n = 1$, iſte angulus erit ſemirectus, hocque caſu Spiralis logarithmica vocatur ſemirectangula.

---

## CAPUT XXII.

*Solutio nonnullorum problematum ad Circulum pertinentium.*

529. **P**osito Radio Circuli $= 1$, ſupra vidimus fore ſemicircumferentiam $\pi$, ſeu Arcum 180 graduum, $=$ 3,14159265358979323846264338, cujus numeri Logarithmus decimalis ſeu vulgaris eſt 0,49714987269413385435126828; qui ſi multiplicetur per 2, 30258 &c., prodibit ejuſdem numeri Logarithmus hyperbolicus, qui erit $=$ 1, 14472988584940017414342 37. Cum igitur longitudo Arcus 180 graduum ſit cognita, inde cujuſvis Arcus in gradibus dati longitudo poterit aſſignari. Propoſitus ſit Arcus $n$ graduum, cujus longitudo, quæ quæritur, ſit $= z$; erit $180 : n = \pi : z$, ideoque $z = \frac{\pi n}{180}$: hinc Logarithmus ipſius $z$ reperitur, ſi a Logarithmo numeri $n$ ſubtrahatur iſte Logarithmus 1, 7581226324091722154525 26413. Quod ſi autem Arcus propoſitus detur in minutis primis, ut ſit $n'$; tum a Logarithmo ipſius $n$ ſubtrahi debebit iſte Logarithmus 3, 536273882792815847961293211. Sin autem Arcus propoſitus

positus detur in minutis secundis ut sit $= n''$, tum longitudinis istius Arcus Logarithmus reperietur, si a Logarithmo numeri $n$ subtrahatur iste Logarithmus 5,3144251331764594804700600009, vel si ad Logarithmum numeri $n$ addatur 4,6855748668235405195299399990, & a characteristica summæ 10 subtrahantur.

530. Ex his ergo vicissim Radius & ejus partes quæcunque, cujusmodi sunt Sinus, Tangentes & Secantes in Arcus converti, hique Arcus more solito secundum gradus, minuta & secunda exprimi possunt. Sit $z$ hujusmodi Linea per Radium 1 ejusque partes decimales expressa; sumatur ejus Logarithmus, ejusque characteristica denario augeatur, quemadmodum in tabulis Logarithmi Sinuum, Tangentium & Secantium repræsentari solent; quo facto vel subtrahatur ab isto Logarithmo 4,6855748668235405195299399990, vel ad eundem Logarithmum addatur 5,3144251331764594804700600009; utroque casu prodibit Logarithmus, cujus numerus respondens præbebit Arcum in minutis secundis expressum. Posteriori quidem casu characteristica denario minui debet. Quod si autem quæratur Arcus ipsi radio æqualis; hic sine Logarithmis facilius per regulam auream invenitur, cum sit $\pi$ ad 180° ut 1 ad Arcum radio æqualem; hinc autem reperitur iste Arcus in gradibus expressus 57°,2957795130823208767 98, idem vero Arcus in minutis primis expressus erit 3437',74677078493925260788; in minutis vero secundis erit idem Arcus $= 206264''$, 8062470963551564728. Consueto autem more hic Arcus expressus continebit

$$57°,\ 17',\ 44'',\ 48''',\ 22'''',\ 29''''',\ 21'''''',$$

Hujus Arcus per series in Sectione superiori exhibitas reperitur

Sinus $= 0,\ 841470984805 14$

&

Cosinus $= 0,\ 54030230584341$

quorum numerorum ille per hunc divisus dabit Tangentem anguli 57°, 17', 44'', 48''', 22'''', 29''''', 21'''''', &c.

LIB. II. 531. His igitur præmiſſis, quibus Arcus circulares cum Sinubus & Tangentibus comparari poſſunt, plurimas quæſtiones ad naturam Circuli ſpectantes reſolvere poterimus. Ac primo quidem, patet omnem Arcum Sinu ſuo eſſe majorem, niſi ſit evaneſcens; aliter autem ratio Coſinuum eſt comparata, quoniam anguli evaneſcentis Coſinus eſt $= 1$, ideoque Arcu major, anguli vero recti Coſinus eſt $= 0$, ideoque Arcu eſt minor: ex quo patet intra limites $0°$ & $90°$ dari Arcum, qui ſit ſuo Coſinui æqualis, quem ſequenti problemate inveſtigemus.

## PROBLEMA I.

*Invenire Arcum Circuli, qui ſit ſuo Coſinui æqualis.*

### SOLUTIO.

Sit $s$ iſte Arcus quæſitus; eritque $s = cof. s$; ex qua æquatione valor ipſius $s$ commodius quam per regulam *falſi* dictam vix inveniri poterit. Ad hoc autem jam propemodum valorem ipſius $s$ noſſe oportet, quod vel levi conjectura aſſequi licet: niſi autem hoc pateat, tres pluresve valores loco $s$ ſubſtituantur, & Coſinus pariter ad eandem unitatem revocetur. Ponamus $s = 30°$, quem Arcum ad partes radii revocemus regula ſupra data

$$l.\ 30 = 1{,}4771213$$
$$\text{ſubtrahe } 1{,}7581226$$
$$l.\ Arch.\ 30°\ 9{,}7189987$$
$$\text{at eſt}$$
$$l.\ cof.\ 30 = 9{,}9375306$$

unde patet Coſinum $30°$ multo eſſe majorem Arcu ideoque Arcum quæſitum majorem eſſe $30°$, Fingamus ergo

$$s = 40^\circ$$

eritque

$$\begin{array}{rl} l.\,40 = & 1,6020600 \\ \text{ſubtrahe} & \underline{1,7581226} \\ l.\,Arc.\,40^\circ = & 9,8439374 \\ & \text{at eſt} \\ l.\,coſ.\,40 = & 9,8842540 \end{array}$$

hinc intelligitur Arcum quæſitum aliquanto majorem eſſe quam $40^\circ$, hancque ob rem fingamus $s = 45^\circ$, erit

$$\begin{array}{rl} l.\,45 = & 1,6532125 \\ \text{ſubtrahe} & \underline{1,7581226} \\ l.\,Arc.\,45^\circ = & 9,8950899 \\ & \text{at eſt} \\ l.\,coſ.\,45^\circ = & 9,8494850 \end{array}$$

continetur ergo angulus quæſitus inter $40^\circ$, & $45^\circ$: atque adeo hinc proxime definiri poterit. Nam, poſito $s = 40^\circ$,

$$\begin{array}{rl} \text{eſt error} = + & 403166: \\ \text{poſito autem } s = & 45^\circ, \\ \text{eſt error} = - & \underline{456049}, \\ \&\ \text{differentia} = & 859215, \end{array}$$

Fiat ergo ut 859215 ad 403166 ita differentia hypotheſium $5^\circ$ ad exceſſum Arcus quæſiti ſupra $40^\circ$, unde Arcus quæſitus major fit quam $42^\circ$, limites enim illi nimis ſunt remoti, quam ut exactius definire queamus. Sumamus ergo limites propiores

| | | |
|---|---|---|
| | $s = 42°$ | $s = 43°$ |
| *l. s* = | 1,6232493 | 1,6334685 |
| subtrahe | 1,7581226 | 1,7581226 |
| *l. s* = | 9,8651267 | 9,8753459 |
| | & est | & est |
| *l. Cos. s* = | 9,8710735 | 9,8641275 |
| | + 59468 | − 112184 |
| | 112184 | |
| | 171652 : 59468 = 1° : 20′, 47″. | |

Arctissimos ergo obtinuimus limites 42°, 20′, & 42°, 21′ intra quos verus ipsius *s* valor contineatur. Hos angulos ad minuta prima revocemus

| | | |
|---|---|---|
| | $s = 2140'$ | $s = 2541'$ |
| *l. s* = | 3,4048337 | 3,4050047 |
| subtrahe | 3,5362739 | 3,5362739 |
| *l. s* = | 9,8685598 | 9,8687308 |
| *l. cos. s* = | 9,8687851 | 9,8686700 |
| | + 2253 | − 608 |
| | 608 | |
| | 2861 : 2253 = 1′ : 47″, 14‴ | |

Hinc concludimus Arcum quæsitum, qui suo Cosinui sit æqualis, fore = 42°, 20′, 47″, 14‴, hujusque Cosinus, seu ipsa longitudo, erit = 0, 7390847. Q. E. I.

Tab. XXVIII. *Fig.* 112. 532. Sector Circuli *ACB* a Chorda *AB* in duas partes secatur, Segmentum *AEB* & triangulum *ACB*, quorum illud hoc minus est si angulus *ACB* fuerit exiguus, majus autem si angulus *ACB* sit admodum obtusus. Dabitur ergo casus quo Sector *ACB* per Chordam *AB* in duas partes æquales secatur, unde nascitur.

### Problema II.

*Invenire Sectorem Circuli* ACB, *qui a Chorda* AB *in duas partes æquales secetur, ita ut Triangulum* ACB *æquale sit Segmento* AEB.

### SOLUTIO.

Poſito Radio $AC = 1$, ſit Arcus quæſitus $AEB = 2s$, ut ſit ejus ſemiſſis $AE = BE = s$: ducto ergo Radio $CE$, erit $AF = \text{ſin.}\, s$, & $CF = \text{coſ.}\, s$: Unde fit Triangulum $ACB = \text{ſin.}\, s.\, \text{coſ.}\, s = \frac{1}{2}.\, \text{ſin.}\, 2s$; & ipſe Sector $ACB$ eſt $= s$, qui cum æquari debeat duplo Triangulo, erit $s = \text{ſin.}\, 2s$; ideoque Arcus quæri debet, qui æqualis ſit Sinui Arcus duplici. Primum quidem patet angulum $ACB$ recto eſſe majorem; ideoque $s$ ſuperare $45^\circ$, unde ſequentes faciamus hypotheſes

| | $s = 50^\circ$ | $s = 55^\circ$ | $s = 54^\circ$ |
|---|---|---|---|
| $l.s =$ | 1, 6989700 | 1, 7403627 | 1, 7323938 |
| ſubtrahe | 1, 7581226 | 1, 7581226 | 1, 7581226 |
| | 9, 9408474 | 9, 9822401 | 9, 9742712 |
| $l.\,\text{ſin.}\, 2s =$ | 9, 9933515 | 9, 9729858 | 9, 9782063 |
| | + 525041 | − 92543 | + 39351 |
| | 92543 | | |

617584 : 525041 = 5° : 4°, 15′

Erit ergo propemodum $s = 54^\circ, 15'$: unde ad ſuperiores hypotheſes addamus $s = 54^\circ$, & ex erroribus concludetur $s = 54^\circ, 17', 54''$, qui valor a vero minuto integro non diſcrepat: faciamus ergo ſequentes poſitiones minuto tantum diſcrepantes

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $s = 54^\circ, 17'$ | $s = 54^\circ, 18'$ | $s = 54^\circ, 19'$ |
| | ſeu | ſeu | ſeu |
| $s =$ | 3257′ | 3258′ | 3259′ |
| | & | & | & |
| $2s =$ | 108°, 34′ | 108°, 36′ | 108°, 38′ |
| $compl. =$ | 71°, 26′ | 71°, 24′ | 71°, 22′ |
| $l.\, s =$ | 3, 5128178 | 3, 5129511 | 3, 5130844 |
| ſubtrahe | 3, 5362739 | 3, 5362739 | 3, 5362739 |
| $l.\, s =$ | 9, 9765439 | 9, 9766772 | 9, 9768105 |
| $l.\,\text{ſin.}\, 2s =$ | 9, 9767872 | 9, 9767022 | 9, 9766171 |
| | + 2433 | + 250 | − 1934 |
| | | 1934 | |
| | | 2184 | |

fiat ergo 2184 : 250 = 1′ : 6″, 52‴

LIB. II. Hinc erit $s = 54^\circ, 18', 6'', 52'''$. Si hunc angulum accuratius determinare velimus, majoribus tabulis uti oportet; unde faciamus sequentes hypotheses 10″ differentes

| | |
|---|---|
| $s = 54^\circ, 18', 0''$ | $s = 54^\circ, 18', 10''$ |
| seu | seu |
| $s = 195480''$ | $s = 195490''$ |
| $2s = 108^\circ, 36', 0''$ | $2s = 108^\circ, 36', 20''$ |
| *compl.* $= 71^\circ, 24', 0''$ | *compl.* $= 71^\circ, 23', 40''$ |
| $l.\,s = 5{,}2911023304$ | $5{,}2911245466$ |
| subtrahe $5{,}3144251332$ | $5{,}3144251332$ |
| $9{,}9766771972$ | $9{,}9766994134$ |
| $l.\,\mathit{fin}.\,2s = 9{,}9767022291$ | $9{,}9766880552$ |
| $+ \quad 250319$ | $- \quad 113582$ |
| $113582$ | |

$$363901 : 250319 = 10'' : 6'', 52''', 43'''', 33'''''.$$

Erit ergo $s = 54^\circ, 18', 6'', 52''', 43'''', 33'''''$;
ideoque angulus $ACB = 108^\circ, 36', 13'', 45''', 27'''', 6'''''$,
ejusque complementum $= 71, 23, 46, 14, 32, 54$,
cujus sinus Logarithmus, seu
$l.\,\mathit{fin}.\,2s = 9{,}9766924791$,
& ipse
finus $= 0{,}9477470$.
Deinde erit
$n.s = AF = BF = 0{,}8121029$,
ideoque ejus duplum, seu
Chorda $AB = 1{,}6242058$.
Præterea vero erit
Cosinus $CF = 0{,}5335143$.
Sicque vero proxime Sector quæsitus construi poterit. Q. E. I.

533. Simili modo determinari potest Sinus, quo Circuli quadrans in duas partes æquales secatur.

## PROBLEMA III.

TAB. XXVIII Fig. 113. *In quadrante Circuli* ACB *applicare Sinum* DE *qui Aream quadrantis in duas partes æquales bisecet.*

SOLUTIO.

Sit Arcus $AE = s$; erit $BE = \frac{\pi}{2} - s$, ob $AEB = \frac{\pi}{2}$; & Area quadrantis $= \frac{1}{4}\pi$. Jam Area Sectoris $ACE$ est $= \frac{1}{2}s$, a qua Triangulum $CDE = \frac{1}{2}.\mathit{fin}.s.\mathit{cof}.s$ subtractum relinquet spatium $ADE = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}.\mathit{fin}.s.\mathit{cof}.s$, cujus duplum dare debet quadrantem: ex quo erit $\frac{1}{4}\pi = s - \frac{1}{2}.\mathit{fin}.2s$: ergo $s - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}.\mathit{fin}.2s$. Ponatur Arcus $s - \frac{1}{4}\varpi = s - 45^{\circ} = u$: erit $2s = 90 + 2u$; ideoque esse oportet $u = \frac{1}{2}.\mathit{cof}.2u$, & $2u = \mathit{cof}.2u$. Cum ergo Arcus requiratur, qui suo Cosinui æquetur, eumque problemate primo invenerimus, erit $2u = 42^{\circ}, 20', 47'', 14'''$, & $u = 21^{\circ}, 10', 23'', 37'''$. Quocirca erit Arcus $AE = s = 66^{\circ}, 10', 23'', 37'''$, & Arcus $BE = 23^{\circ}, 49', 36'', 23'''$. Hinc erit Radii pars $CD = 0,4039718$, & $AD = 0,5960281$, atque Sinus $DE = 0,9147711$. Hoc ergo modo, quo Circuli quadrans bisecatur, totus Circulus secabitur in 8 partes æquales. Q. E. F.

534. Quemadmodum Circulum omnis recta per Centrum ducta bifariam secat, ita ex quovis Peripheriæ puncto rectæ educi poterunt, quæ Circulum in tres pluresve partes æquales secent. Inquiramus in quadrisectionem, ac resolvamus.

PROBLEMA IV.

*Proposito semicirculo* AEDB *ex puncto* A *educere Chordam* AD *quæ Aream semicirculi in duas partes æquales secet.* TAB. XXVIII *Fig.* 114.

SOLUTIO.

Sit Arcus quæsitus $AD = s$; ductoque Radio $CD$, erit

LIB. II. area Sectoris $ACD = \frac{1}{2} s$, a qua auferatur Triangulum $ACD = \frac{1}{2} AC . DE = \frac{1}{2} . \sin. s$, remanebitque Segmentum $AD = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} . \sin. s$, quod æquale esse debet semissi semicirculi $ADB$, at area semicirculi est $= \frac{1}{2} \pi$ : unde erit $s - \sin. s = \frac{1}{2} \pi = 90^\circ$, ideoque $s - 90^\circ = \sin. s$. Ponatur $s - 90^\circ = u$; erit $\sin. s = \cos. u$, & hanc ob rem $u = \cos. u$. Per Problema ergo primum erit $u = 42^\circ, 20', 47'', 14'''$; hincque $s =$ angulo $ACD = 132^\circ, 20', 47'', 14'''$, & angulus $BCD = 47^\circ, 39', 12'', 46'''$. Ipsa vero Corda $AD$ erit $= 1,8295422$. Q. E. F.

535. Sic igitur in Circulo Segmentum abscinditur cujus area sit totius Circuli pars quarta, Segmentum autem semissi Circuli æquale est ipse semicirculus ejusque Corda Diameter. Simili modo Segmentum inveniri potest, quod sit triens totius Circuli, quod sequenti Problemate investigemus.

## PROBLEMA V.

TAB. XXIX. Fig. 115. *Ex puncto Peripheriæ* A *educere duas Cordas* AB, AC, *quibus area Circuli in tres partes æquales dividatur.*

## SOLUTIO.

Posito Circuli Radio $= 1$, & hemiperipheria $= \pi$, sit Arcus $AB$ vel $AC = s$; eritque area Segmenti $AEB$ vel $AFC = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} . \sin. s$: at area Circuli est $= \pi$; unde, cum Segmenti $AEB$ area debeat esse triens Circuli, fiet $\frac{1}{2} s - \frac{1}{2} . \sin. s = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$; seu, $s - \sin. s = 120^\circ$, ideoque $s - 120^\circ = \sin. s$. Sit $s - 120^\circ = u$, erit $u = \sin. (u + 120) = \sin. (60 - u)$.

Arcus

Arcus ergo $u$ quæri debet, qui ſit æqualis ſinui anguli $60^\circ - u$. Erit ergo $u$ minor quam $60^\circ$; ad quem Arcum inveniendum faciamus ſequentes poſitiones

CAP. XXII.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u = 20^\circ$ | $u = 30^\circ$ | $u = 40^\circ$ |
| $60 - u = 40^\circ$ | $60 - u = 30^\circ$ | $60 - u = 20^\circ$ |
| $l.\ u = 1{,}3010300$ | $1{,}4771213$ | $1{,}6020600$ |
| ſubtrahe $1{,}7581226$ | $1{,}7581226$ | $1{,}7581226$ |
| $l.\ u = 9{,}5429074$ | $9{,}7189987$ | $9{,}8439374$ |
| $l.\ fin.\ (60 - u) = 9{,}8080675$ | $9{,}6989700$ | $9{,}5340517$ |
| $+\ 2651601$ | $-\ 200287$ | $-\ 3098857$ |

Patet ergo angulum $u$ aliquanto eſſe minorem quam $30^\circ$, &, calculo ſubducto, major eſſe debet quam $29^\circ$ ſit ergo $u = 29^\circ$

$$
\begin{aligned}
60 - u &= 31^\circ \\
l.\ u &= 1{,}4623980 \\
\text{ſubtrahe}\ & \underline{1{,}7581226} \\
l.\ u &= 9{,}7042754 \\
l.\ fin.\ (60 - u) &= \underline{9{,}7118393} \\
&+\ 75649 \\
&-\ \underline{200287} \\
& 275926 : 75639 = 1^\circ : 16',\ 26''.
\end{aligned}
$$

Foret ergo angulus $u = 29^\circ,\ 16',\ 26''$, ad quem accuratius inveniendum, faciamus has hypotheſes uno tantum minuto differentes

| | |
|---|---|
| $u = 29^\circ, 16'$ | $u = 29^\circ, 17'$ |
| ſeu | ſeu |
| $u = 1756'$ | $u = 1757'$ |
| $60 - u = 30^\circ, 44'$ | $60 - u = 30^\circ, 43'$ |
| $l.\ u = 3{,}2445245$ | $3{,}2447718$ |
| ſubtrahe $3{,}5362739$ | $3{,}5362739$ |
| $l.\ u = 9{,}7082506$ | $9{,}7084979$ |
| $l.\ fin.\ (60 - u) = 9{,}7084575$ | $9{,}7082450$ |
| $+\ 2069$ | $-\ 2529$ |

$$
\begin{aligned}
& \underline{2529} \\
& 4598 : 2069 = 1' : 27'',\ 0'''.
\end{aligned}
$$

Erit ergo vere $u = 29^\circ,\ 16',\ 27'',\ 0'''$,

hincque

Arcus $s = AEB = 149^\circ, 16', 27'', 0''' = AFC$;
unde refultat
Arcus $BC = 61^\circ, 27', 6'', 0'''$,
ipfa vero
Chorda $AB = AC = 19285340$. Q. E. F.

536. His Problematis, quibus Arcus quifpiam quæritur dato Sinui vel Cofinui æqualis, adjungamus fequens, quo quidem idem negotium proponitur, attamen major difficultas occurrit.

### PROBLEMA VI.

TAB. XXIX. Fig. 116. *In femicirculo* AEB *Arcum* AE *abfcindere, ita ut, ducto ejus Sinu* ED, *Arcus* AE *fit æqualis fummæ rectarum* AD + DE.

### SOLUTIO.

Quoniam ftatim patet hunc Arcum quadrante effe majorem, quæramus ejus Complementum $BE$, & vocemus Arcum $BE = s$, ita ut fit Arcus $AE = 180^\circ - s$, atque ob $AC = 1$, $CD = cof. s$, $DE = fin. s$, erit $180^\circ - s = 1 + cof. s + fin. s$. At, eft $fin. s = 2 fin. \frac{1}{2} s. cof. \frac{1}{2} s$, & $1 + cof. s = 2 cof. \frac{1}{2} s. cof. \frac{1}{2} s$; unde fit $180^\circ - s = 2 cof. \frac{1}{2} s (fin. \frac{1}{2} s + cof. \frac{1}{2} s)$. At, eft $cof. (45^\circ - \frac{1}{2} s) = \frac{1}{\sqrt{2}}. cof. \frac{1}{2} s + \frac{1}{\sqrt{2}}. fin. \frac{1}{2} s$: ergo $fin. \frac{1}{2} s + cof. \frac{1}{2} s = \sqrt{2}. cof. (45^\circ - \frac{1}{2} s)$: unde erit $180^\circ - s = 2\sqrt{2}. cof. \frac{1}{2} s \times cof. (45^\circ - \frac{1}{2} s)$. Hac facta reductione, faciamus fequentes pofitiones

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2} s = 20^\circ$ | $\frac{1}{2} s = 21^\circ$ |
| $45^\circ - \frac{1}{2} s = 25^\circ$ | $45^\circ - \frac{1}{2} s = 24^\circ$ |
| $180 - s = 140^\circ$ | $180 - s = 138^\circ$ |
| $l.\,(180 - s) = 2{,}1461280$ | $2,\ 1398791$ |
| ſubtrahe $1{,}7581226$ | $1,\ 7581226$ |
| $l.\,(180 - s) = 0{,}3880054$ | $0,\ 3817565$ |
| $l.\,cof.\,\frac{1}{2} s = 9{,}9729858$ | $9,\ 9701517$ |
| $l.\,cof.\,(45^\circ - \frac{1}{2})\,s = 9{,}9572757$ | $9,\ 9607302$ |
| $l.\,2\sqrt{2} = 0{,}4515450$ | $0,\ 4515450$ |
| $0{,}3818065$ | $0,\ 3824269$ |
| Error $+\ 61989$ | $-\ 6704$ |

$$\begin{array}{r} 6704 \\ \hline 68693 : 61989 = 1^\circ : 54' \end{array}$$

Hinc continetur $\frac{1}{2} s$ intra limites $20^\circ, 54'$, & $20^\circ, 55'$, ideoque ſequentes hypotheſes fiant

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2} s = 20^\circ, 54'$ | $\frac{1}{2} s = 20^\circ, 55'$ |
| $45^\circ - \frac{1}{2} s = 24^\circ, 6'$ | $45 - \frac{1}{2} s = 24^\circ, 5'$ |
| $s = 41^\circ, 48'$ | $s = 41^\circ, 50'$ |
| $180 - s = 138^\circ, 12'$ | $180 - s = 138^\circ, 10'$ |
| ſeu | ſeu |
| $180 - s = 8292'$ | $180 - s = 8290'$ |
| $l.\,(180 - s) = 3{,}9186593$ | $3,\ 9185545$ |
| ſubtrahe $3{,}5362739$ | $3,\ 5362739$ |
| $0{,}3823854$ | $0,\ 3822806$ |
| $l.\,cof.\,\frac{1}{2}\,s = 9{,}9704419$ | $9,\ 9703937$ |
| $l.\,cof.\,(45 - \frac{1}{2})\,s = 9{,}9603919$ | $9,\ 9604484$ |
| $l.\,2\sqrt{2} = 0{,}4515450$ | $0,\ 4515450$ |
| $0{,}3823788$ | $0,\ 3823871$ |
| Error $+\ 66$ | $-\ 1065$ |

$$\begin{array}{r} 1065 \\ \hline 1131 : 66 = 1' : 3'', 30'''. \end{array}$$

 Hanc ob rem erit $\frac{1}{2}\ s = 20^{\circ},\ 54',\ 3'',\ 30'''$,

inde

$$s = 41^{\circ},\ 48',\ 7'',\ 0''' = BE$$

ideoque Arcus quæſitus

$$AE = 138^{\circ},\ 11',\ 53'',\ 0'''.$$

Erit vero Linea

$$DE = 0,6665578,\ \&\ AD = 1,7454535.\quad Q.\ E.\ F.$$

537. Comparemus nunc Arcus cum ſuis Tangentibus ; & , cum in primo quadrante Tangentes ſint Arcubus minores , quæramus Arcum , qui ſuæ Tangentis ſemiſſi ſit æqualis , quo ſolvetur

## Problema VII.

Tab. XXIX. Fig. 117. *Abſcindere Sectorem* ACD, *qui ſit ſemiſſis Trianguli* ACE *a Radio* AC, *Tangente* AE *&* *Secante* CE *comprehenſi.*

### Solutio.

Poſito Arcu $AD = s$, erit Sector $ACD = \frac{1}{2}\ s$, Triangulum vero $ACE = \frac{1}{2}.\ tang.\ s$ : unde debet eſſe $\frac{1}{2}.\ tang.\ s = s$, ſeu $2s = tang.\ s$. Faciamus ergo has hypotheſes

| | $s = 60^{\circ}$ | $s = 70^{\circ}$ | $s = 66^{\circ}$ | $s = 67^{\circ}$ |
|---|---|---|---|---|
| $l.\ 2s =$ | 2,0791812 | 2,1461280 | 2,1205739 | 2,1271048 |
| | 1,7581226 | 1,7581226 | 1,7581226 | 1,7581226 |
| $l.\ 2s =$ | 0,3210586 | 0,3880054 | 0,3624513 | 0,3689822 |
| $l.\ tang.\ s =$ | 0,2385606 | 0,4389341 | 0,3514169 | 0,3721481 |
| | + 824980 | — 509287 | + 110344 | — 31659 |

Hinc ipſius $s$ reperiuntur limites arctiores $66^{\circ},\ 46'$, & $66^{\circ},\ 47'$ : quare fiat

CAP. XXII.

| | |
|---|---|
| $s = 66^\circ, 46'$ | $s = 66^\circ, 47'$ |
| feu | feu |
| $s = 4006'$ | $s = 4007'$ |
| $2s = 8012'$ | $2s = 8014'$ |
| $l. 2s = 3,9037409$ | $3,9038493$ |
| $3,5362739$ | $3,5362739$ |
| $l. 2s = 0,3674670$ | $0,3675754$ |
| $l. tang. s = 0,3672499$ | $0,3675985$ |
| Error $+ 2171$ | $- 231$ |

$$\begin{array}{r} 231 \\ \hline 2402 : 2171 = 1' : 54'', 14'''. \end{array}$$

unde erit

$$\text{Arcus } s = AD = 66^\circ, 46', 54'', 14''',$$

hincque

$$\text{Tangens } AE = 2,3311220. \quad Q. E. F.$$

538. Proponatur nunc fequens.

## PROBLEMA VIII.

*Propofito Circuli quadrante* ACB *invenire Arcum* AE, *qui æqualis fit Chordæ fuæ* AE *ad occurfum* F *ufque productæ.* TAB. XIX. Fig. 118.

## SOLUTIO.

Sit Arcus $AE = s$, erit ejus Chorda $AE = 2.fin. \frac{1}{2}s$, finus verfus $AD = 1 - cof. s = 2.fin. \frac{1}{2}s.fin. \frac{1}{2}s$: unde Triangula fimilia $ADE$, $ACF$, dabunt $2.fin. \frac{1}{2}s.fin. \frac{1}{2}s : 2.fin. \frac{1}{2}s = 1 : s$, eritque ergo $s.fin. \frac{1}{2}s = 1$. Fiant ergo fequentes pofitiones

| | $s = 70°$ | $s = 80°$ | $s = 84°$ | $s = 85°$ |
|---|---|---|---|---|
| $l. s =$ | 1,8450980 | 1,9030900 | 1,9242793 | 1,9294189 |
| ſubtrahe | 1,7581226 | 1,7581226 | 1,7581226 | 1,7581226 |
| | 0,0869754 | 0,1449674 | 0,1661567 | 0,1712963 |
| $l. \sin. \frac{1}{2} s =$ | 9,7585913 | 9,8080675 | 9,8255109 | 9,8296833 |
| | 9,8455667 | 9,9530349 | 9,9916676 | 0,0009796 |
| Error | + 0,1544332 | 0,0469650 | + 83223 | − 9796 |

Unde $s$ continetur intra limites 84°, 53′, & 84°, 54′

Sit ergo

| | | |
|---|---|---|
| | $s = 84°, 53'$ ſeu | $s = 84°, 54'$ ſeu |
| | $s = 5093'$ | $s = 5094'$ |
| | $\frac{1}{2} s = 42°, 26 \frac{1}{2}'$ | $\frac{1}{2} s = 42°, 27'$ |
| $l. s =$ | 3, 7069737 | 3, 7070589 |
| ſubtrahe | 3, 5362739 | 3, 5362739 |
| | 0, 1706998 | 0, 1707850 |
| $l. \sin. \frac{1}{2} s =$ | 9, 8292003 | 9, 8292694 |
| | 0, 9999001 | 0, 0000544 |
| Error | + 998 | − 544 |

Hincque oritur

Arcus $s = AE = 84°, 53', 38'', 51'''$,

&

Arcus $BE = 50°, 6', 21'', 9'''$. *Q. E. I.*

539. Quanquam in primo quadrante omnes Arcus ſunt ſuis Tangentibus minores, tamen in ſequentibus quadrantibus dantur ejuſmodi Arcus qui ſint æquales ſuis Tangentibus; quos in ſequenti Problemate methodo ex ſeriebus petita inveſtigemus.

## PROBLEMA IX.

*Invenire omnes Arcus, qui Tangentibus ſuis ſint æquales.*

### SOLUTIO.

Primus Arcus hac proprietate præditus eſt infinite parvus.

Tum in secundo quadrante, quia hic Tangentes sunt negativæ, datur nullus istiusmodi Arcus; in tertio vero quadrante dabitur unus $270^\circ$ aliquanto minor; porro dabuntur ejusmodi Arcus in quinto, septimo, &c. Ponatur quarta Peripheriæ pars $= q$, & Arcus quæsiti contineantur in hac forma $(2n+1)q - s$, ita ut sit $(2n+1)q - s = cot.\, s = \frac{1}{tang.\, s}$. Sit $tang.\, s = x$; erit $s = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$, ideoque $(2n+1)q = \frac{1}{x} + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \&c.$ Patet autem, ob $s$ Arcum eo minorem, quo major fuerit numerus $n$, fore $x$ quantitatem valde parvam ideoque proxime $x = \frac{1}{(2n+1)q}$; seu $\frac{1}{x} = (2n+1)q$; propius autem invenitur $\frac{1}{x} = (2n+1)q - s = (2n+1)q - \frac{1}{(2n+1)q} - \frac{2}{3(2n+1)^3 q^3} - \frac{13}{15(2n+1)^5 q^5} - \frac{146}{105(2n+1)^7 q^7} - \frac{2343}{945(2n+1)^9 q^9} - \&c.$ Cum ergo sit $q = \frac{\pi}{2} = 1{,}5707963267948$, erit Arcus quæsitus $= (2n+1)\, 1{,}570796326 79 - \frac{1}{2n+1} 0{,}63661977 - \frac{0{,}17200817}{(2n+1)^3} - \frac{0{,}09062596}{(2n+1)^5} - \frac{0{,}05892834}{(2n+1)^7} - \frac{0{,}04258543}{(2n+1)^9} - \&c.$ Vel si isti termini, qui in partibus Radii exprimuntur, ad mensuram Arcuum reducantur, erit Arcus quæsitus in genere consideratus $= (2n+1)\, 90^\circ - \frac{131313''}{2n+1} - \frac{35479''}{(2n+1)^3} - \frac{18692''}{(2n+1)^5} - \frac{12155''}{(2n+1)^7} - \frac{8784''}{(2n+1)^9}$. Arcus ergo quæstioni satisfacientes ordine sunt.

LIB. II.

| | | |
|---|---|---|
| I. | 1. 90° — | 90° |
| II. | 3. 90° — | 12° 32′ 48″ |
| III. | 5. 90° — | 7, 22, 32 |
| IV. | 7. 90° — | 5, 14, 22 |
| V. | 9. 90° — | 4, 3, 59 |
| VI. | 11. 90° — | 3, 19, 24 |
| VII. | 13. 90° — | 2, 48, 37 |
| VIII. | 15. 90° — | 2, 26, 5 |
| IX. | 17. 90° — | 2, 8, 51 |
| X. | 19. 90° — | 1, 55, 16 |

540. Hujusmodi quæstiones plures non propono, cum methodus ea resolvendi ex his exemplis clare perspiciatur. Ceterum hæc Problemata in hunc finem potissimum sunt excogitata, ut Circuli natura, cujus quadratura omnibus methodis adhuc usitatis frustra fuit tentata, penitius inspiciatur. Si enim accidisset, ut in solutione cujuspiam Problematis, vel Arcus cum tota Circumferentia commensurabilis, vel ejus Sinus Tangensve per Radium construibilis prodiisset, tum utique species quædam quadraturæ Circuli haberetur. Scilicet, si in solutione Problematis VI. Sinus $DE$, qui prodit $= 0{,}6665578$, inventus fuisset $= 0{,}6666666 = \frac{2}{3}$, elegans certe Circuli proprietas innotesceret, Arcus quippe $AE$ construi posset Lineæ rectæ $AD + DE = 1 + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{5}{9}}$ æqualis. Nulla vero etiamnum ratio patet, quæ hujusmodi Circuli quadraturam impossibilem esse evincat: atque, si talis detur, nulla alia via, præter hanc, quam hoc Capite aperuimus, ad eam investigandam magis apta videtur.

TAB. XXIX. Fig. 116.

*FINIS LIBRI SECUNDI.*

APPEN-

# APPENDIX

## DE

# SUPERFICIEBUS.

## CAPUT I.

### *De Superficiebus Corporum in genere.*

1. Quae in superiori Sectione de Lineis curvis sunt tradita earumque ad aequationes revocandarum ratione, latissime quidem patent, atque ad omnes Lineas curvas, quarum cuncta puncta in eodem plano sint posita, extenduntur. Verum, si tota Linea curva non fuerit in eodem plano sita, tum praecepta supra data non sufficiunt ad proprietates ejusmodi Curvarum eruendas. Hujus generis Curvae duplicem habent curvaturam; hocque nomine de iis eximium scripsit tractatum Acutissimus Geometra Clairaut. Cum autem haec materia maxime sit connexa cum natura Superficierum, de qua hac sectione exponere constitui, seorsim eam non pertractabo, sed ejus explicationem cum sequenti de Superficiebus doctrina conjungam.

2. Quemadmodum Lineae sunt vel rectae vel curvae, ita Superficies sunt vel planae, vel non planae. Non planas autem voco, quae vel convexae sunt vel concavae, vel utriusque naturae participes. Sic, Superficies externa Globi, Cylindri, & Coni, exceptis basibus, est convexa; interna autem catini Superficies concava. Quemadmodum porro Linea recta est, cujus terna quaeque puncta in directum sunt posita; ita Superficies plana est cujus quaterna quaeque puncta in eodem plano sunt posita; ex quo perspicuum est Superficiem non planam, hoc est sive convexam, sive concavam, esse cujus non omnia quaterna puncta in eodem plano sunt sita.

3. Superficies igitur non plana qualis sit facilime intelligetur si, quantum a Superficie plana ubique discrepet, cognoverimus. Simili scilicet modo, quo indolem Linearum curvarum ex distantiis, quibus ejus quaeque puncta a Linea recta pro Axe assumta distant, colligimus, ita naturam Superficierum

APPEND. æstimari conveniet ex singulorum ejus punctorum distantiis a Superficie plana pro lubitu assumta. Proposita ergo quacunque Superficie, cujus indolem definiri oporteat, pro arbitrio eligatur Superficies plana, ad quam ex singulis Superficiei propositæ punctis perpendicula ducta concipiantur: quo facto, si cujusvis horum perpendiculorum longitudo per æquationem determinari queat, naturam Superficiei hac ipsa æquatione exprimi censebimus. Ex tali enim æquatione vicissim omnia Superficiei puncta assignari poterunt, atque ideo ipsa Superficies determinabitur.

TAB. XXX. *Fig.* 119.

4. Repræsentet planum tabulæ eam Superficiem planam, ad quam singula cujusque Superficiei propositæ puncta referamus. Sit $M$ punctum quodcunque Superficiei propositæ, quod extra planum tabulæ situm concipiatur, unde ad hoc planum perpendicularis demittatur $MQ$, plano in puncto $Q$ occurrens. Jam, ad situm hujus puncti $Q$ calculo exprimendum, assumatur in plano tabulæ recta quæpiam $AB$ pro Axe, ad quem ex puncto $Q$ recta normalis ducatur $QP$. Denique in ipso Axe $AB$ sumatur punctum quodvis $A$ pro initio Abscissarum: quo facto, situs puncti $M$ innotescet si noverimus longitudines trium istarum Linearum $AP$, $PQ$ & $QM$, sicque tribus Coordinatis inter se normalibus situs cujusque Superficiei puncti $M$ simili modo determinabitur, quo Linearum curvarum in plano sitarum singula puncta per duas Coordinatas inter se normales exhiberi solent.

5. Cum igitur habeamus tres Coordinatas $AP$, $PQ$ & $QM$, ponamus $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; ex hisque indolem Superficiei propositæ intelligemus, si, sumtis pro lubitu binis $x$ & $y$, noverimus quanta futura sit tertia $z$; hoc enim modo omnia Superficiei puncta $M$ determinare poterimus. Natura ergo cujusvis Superficiei exprimitur æquatione, qua Coordinata $z$ definitur per binas reliquas $x$ & $y$ una cum constantibus. Hinc pro quavis Superficie proposita variabilis $z$ æquabitur Functioni cuidam binarum variabilium $x$ & $y$. Atque vicissim, si $z$ æqualis fuerit Functioni cui-

cunque ipſarum $x$ & $y$, tum iſta æquatio exhibebit Superficiem quampiam, cujus natura ex ipſa illa æquatione innoteſcet. Subſtituendis enim pro $x$ & $y$ omnibus, quos recipere poſſunt, valoribus, tam affirmativis quam negativis, omnia plani aſſumti puncta $Q$ obtinebuntur: tum vero ex æquatione ipſius $z$ per $x$ & $y$ conſtabit ubique longitudo perpendiculi $QM = z$, donec ad Superficiem, pertingat: qui ipſius $z$ valor ſi fuerit affirmativus, punctum Superficiei $M$ ſupra planum $APQ$, erit ſitum; ſin autem ſit negativus, infra hoc planum cadet; ſi evaneſcat, punctum Superficiei $M$ in hoc ipſo plano reperietur; at, ſi fuerit imaginarius, tum puncto $Q$ nullum prorſus Superficiei punctum $M$ reſpondebit. Quod ſi autem eveniat, ut $z$ habeat plures valores reales, tum recta ad planum normalis per punctum $Q$ ducta Superficiem in pluribus punctis $M$ trajiciet.

6. Quod igitur ad varias Superficierum naturas attinet, hic ſtatim ſe offert diſtinctio in continuas ſeu regulares, & diſcontinuas ſeu irregulares. Superficies ſcilicet continua erit, cujus omnia puncta per eandem æquationem inter $z$ & $x$ & $y$ exprimuntur ſeu; ubi $z$ eſt eadem Functio ipſarum $x$ & $y$ pro omnibus Superficiei punctis. Superficies autem irregularis eſt cujus variæ partes per diverſas Functiones exhibentur; uti, ſi propoſita fuerit Superficies, quæ in uno loco ſit ſphærica, in alio conica, ſeu cylindrica, ſeu plana. Hic autem Superficies irregulares penitus excludimus, atque ad ſolas regulares, quarum natura una quadam conſtanti æquatione contineatur, reſpiciemus. His enim pertractatis, quoniam Superficies irregulares ex partibus variarum regularium ſunt conflatæ, etiam iſtas facile dijudicare licebit.

7. Superficierum autem regularium primaria diviſio inſtituitur in algebraïcas & tranſcendentes. Superficies autem algebraïca vocatur, cujus natura exprimitur per æquationem algebraïcam inter Coordinatas $x$, $y$ & $z$; ſeu, quando $z$ æqualis eſt Functioni algebraïcæ ipſarum $x$ & $y$. Contra igitur, ſi $z$ non fuerit Functio algebraïca ipſarum $x$ & $y$; ſeu, ſi in æqua-

APPEND. tione inter $x$, $y$, & $z$ insint quantitates transcendentes, veluti a Logarithmis & Arcubus circularibus pendentes, tum Superficies, cujus natura hujusmodi æquatione exprimitur, erit transcendens. Talis erit Superficies, si fuerit $z = x.l.y$; seu $z = y^x$; seu $z = y.\,fin.\,x$. Facile autem intelligitur Superficies algebraïcas ante tractari oportere, quam ad transcendentes progrediamur.

8. Deinde ad naturam Superficiei cognoscendam, imprimis attendendum est, qualis sit Functio $z$ ipsarum $x$ & $y$, ratione numeri valorum, quos continet. Hic igitur primum occurrunt eæ Superficies, pro quibus $z$ æquatur Functioni uniformi ipsarum $x$ & $y$. Sit $P$ hujusmodi Functio uniformis, seu rationalis, ipsarum $x$ & $y$; atque, si fuerit $z = P$, singulis punctis plani $Q$ totidem respondebunt Superficiei puncta; seu, quælibet recta ad planum $APQ$ normalis Superficiem in unico puncto trajiciet. Neque vero hoc casu usquam valor rectæ $QM$ fieri poterit imaginarius; sed omnes istiusmodi rectæ puncta Superficiei realia præbebunt. Interim tamen ista Functionum diversitas non essentialem varietatem inter Superficies producit; pendet enim a situ plani $APQ$, qui, perinde ac Axis, est arbitrarius; ita ut, si Superficies eadem ad aliud planum referatur, Functio $z$ quæ erat uniformis, evadere possit utcunque multiformis.

9. Sint $P$ & $Q$ Functiones quæcunque uniformes ipsarum $x$ & $y$; atque, si fuerit $zz - Pz + Q = 0$, tum rectæ per singula plani puncta $Q$ normaliter ductæ Superficiem, vel in duobus punctis secabunt, vel nusquam: habebit enim $z$ duos valores, qui vel ambo erunt reales, vel ambo imaginarii. Simili modo si, denotantibus $P$, $Q$ & $R$ Functiones uniformes ipsarum $x$ & $y$, fuerit $z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$; tum erit $z$ Functio triformis, & quælibet recta $QM$ Superficiem secabit vel in tribus punctis, si omnes radices æquationis fuerint reales, vel tantum in unico, si scilicet binæ radices fuerint imaginariæ. Similique modo erit judicandum,

si $z$ definiatur per æquationem, in qua plures obtineat dimensiones. Quam multiformis igitur futura sit Functio $z$ facillime cognoscetur, si æquatio inter $x$ & $y$ & $z$, ad rationalitatem perducatur.

10. De cetero, sicuti in æquationibus pro Lineis curvis binas Coordinatas inter se permutari posse vidimus, ita in æquatione quavis pro Superficiei tres Coordinatæ $x$, $y$, & $z$ inter se sunt permutabiles. Primo enim, si in plano $APQ$ altera recta $Ap$ ad $AP$ normalis pro Axe assumatur, erit nunc $Ap = y$, & $pQ = x$; sicque binæ $x$ & $y$ inter se sunt permutatæ. Reliquæ permutationes omnes intelligentur complendo parallelepipedon rectangulum $ApQM\xi\pi qPA$; in quo primum spectanda veniunt tria plana fixa inter se normalia $APQp$, $APq\pi$, & $Ap\xi\pi$; ad quæ singula, quemadmodum referatur Superficies proposita cujus punctum est $M$, eadem æquatio inter $x$, $y$, & $z$ declarat. In unoquoque autem plano duplex datur Axis, uterque initium habens in puncto $A$, unde sex diversæ relationes inter tres Coordinatas resultant.

Coordinatæ erunt

Pro plano $APQp$

vel $\begin{cases} AP = x \\ PQ = y \\ QM = z \end{cases}$

vel $\begin{cases} Ap = y \\ pQ = x \\ QM = z \end{cases}$

---

Pro plano $Apq\pi$

vel $\begin{cases} AP = x \\ Pq = z \\ qM = y \end{cases}$

vel $\begin{cases} A\pi = z \\ \pi q = x \\ qM = y \end{cases}$

APPEND.

$$\text{vel} \begin{cases} Ap = y \\ p\xi = z \\ \xi M = x \end{cases}$$

Pro plano $A p \xi \pi$

$$\text{vel} \begin{cases} A\pi = z \\ \pi\xi = y \\ \xi M = x \end{cases}$$

Quod ſi autem a puncto fixo $A$ ad punctum Superficiei $M$ ducatur recta $AM$ erit ea $= \sqrt{(xx + yy + zz)}$.

11. Eadem ergo æquatio inter Coordinatas $x$, $y$, & $z$ cognitionem Superficiei ad tria plana exhibet, quæ inter ſe ſunt normalia atque ſe invicem in puncto $A$ decuſſant. Quemadmodum ſcilicet variabilis $z$ diſtantiam cujuſque Superficiei puncti $M$ a plano $APQ$ exhibet, ita variabilis $y$ ejuſdem puncti $M$ diſtantiam a plano $APq$, & variabilis $x$ a plano $AP\xi$ præbet. Quod ſi autem noverimus, quantis intervallis punctum $M$ diſtet ab unoquoque horum trium planorum, tum ſimul ejus verus ſitus innoteſcit. Hæc igitur tria plana, ad quæ Superficies quævis per æquationem trium variabilium $x$, $y$ & $z$ refertur, imprimis notari debent; quorum ſi unum, uti $APQ$, fuerit horizontale, duo reliqua erunt verticalia, alterum ſcilicet horizontali ſecundum rectam $AP$ alterum ſecundum rectam $Ap$ inſiſtet.

12. Conſtitutis ergo his tribus planis inter ſe normalibus, ad quæ Superficies propoſita referatur, ex ſingulis ejus punctis $M$ ad iſta plana $APQ$, $APq$, & $A\pi\xi$ ducantur rectæ normales $MQ$, $Mq$, & $M\xi$, quæ erunt $MQ = z$, $Mq = y$, & $M\xi = x$. Deinde, completo parallelepipedo, habebuntur tres rectæ iſtis æquales, quæ ex puncto fixo $A$ egrediantur, ſcilicet $Ap = x$, $Ap = y$, & $A\pi = z$, ex quibus cognitis ſitus puncti $M$ determinatur. Manifeſtum autem eſt, ſi iſtæ variabiles $x$, $y$, & $z$, dum in plagas; quas Figura indicat, vergunt, affirmativæ cenſeantur, tum earum valores, ſi in plagas contrarias dirigantur, negativos cenſeri oportere.

13. Si

13. Si in æquatione inter tres variabiles $x$, $y$ & $z$ ea quæ ad planum $APQ$ est normalis, nempe $z$, ubique pares habeat dimensiones, tum geminos habebit valores æquales, alterum affirmativum alterum negativum. Superficies igitur ita erit comparata, ut ad utramque plani $APQ$ partem sit sui similis & æqualis, atque adeo Corpus, quod ista Superficie terminatur, sectione secundum planum $APQ$ facta, in duas partes similes & æquales dividetur. Quemadmodum ergo in Figuris planis ea Linea recta, qua Figura in duas partes similes & æquales dirimebatur, Diameter est appellata; ita in solidis id planum, quo Corpus in duas partes similes dividitur, *Diametrale* vocemus. Quare, si variabilis $z$ in æquatione ubique pares habeat dimensiones, tum planum $APQ$, erit diametrale.

14. Simili modo intelligitur, si in æquatione pro Superficie variabilis $y$, quæ ad planum $APq$ est normalis, ubique pares habeat dimensiones, tum planum $APq$ fore diametrale. Sin autem variabilis $x$ pares ubique habeat dimensiones, tum planum $Ap\xi$ erit diametrale. Ex æquatione ergo pro quavis Superficie inter tres variabiles $x$, $y$ & $z$ data statim apparet, utrum ex tribus planis $APQ$, $APq$, $Ap\xi$, sit diametrale an secus. Fieri autem potest, ut duo, imo omnia tria hæc plana, sint diametralia. Scilicet, pro Globo, cujus Centrum sit in $A$, ob radium $AM = \sqrt{(xx + yy + zz)} = a$, erit $xx + yy + zz = aa$, unde singulis hisce tribus planis Globus in duas partes similes & æquales dispertietur.

15. Ad Figuram Superficiei, quæ in proposita æquatione continetur, cognoscendam, ad tria illa plana inter se normalia imprimis attendi oportet, quæ in Figura repræsentantur per $QQ'Q''Q'''$, & $TT'T''T'''$, atque $VV'V''V'''$, atque se mutuo in puncto $A$ intersecant. Hæc tria plana, si in infinitum quaquaversus producta concipiantur, universum spatium divident in octo regiones, quæ in Figura exhibentur litteris $AX$, $AX'$, $AX''$, $AX'''$, $AX^{\text{IV}}$, $AX^{\text{V}}$, $AX^{\text{VI}}$, & $AX^{\text{VII}}$. Quod, si jam in prima regione $AX$ variabiles $x$, $y$ & $z$, TAB. XXX. Fig. 120.

APPEND. affirmativos valores habere ponantur, in reliquis regionibus una vel duæ omnes tres fient negativæ. Ratio autem horum valorum clarissime ex sequenti schemate perspicietur

| Regio $AX$ | Regio $AX'$ | Regio $AX^2$ | Regio $AX^3$ |
|---|---|---|---|
| $AP = +x$ | $AP' = -x$ | $AP = +x$ | $AP' = -x$ |
| $AR = +y$ | $AR = +y$ | $AR = +y$ | $AR = +y$ |
| $AS = +z$ | $AS = +z$ | $AS' = -z$ | $AS' = -z$ |
| Regio $AX^4$ | Regio $AX^5$ | Regio $AX^6$ | Regio $AX^7$ |
| $AP = +x$ | $AP' = -x$ | $AP = +x$ | $AP' = -x$ |
| $AR' = -y$ | $AR^2 = -y$ | $AR' = -y$ | $AR^2 = -y$ |
| $AS = +z$ | $AS = +z$ | $AS' = -z$ | $AS' = -z$ |

TAB. XXXI. Fig. 121. 16. Commodius autem erit octo has diversas regiones numeris insignire, quo facilius, de quanam sermo sit, indicare queamus. Cum igitur octo istæ regiones in puncto $A$ sint confines, atque interfectione trium planorum inter se normalium distinguantur; plana autem hæc tribus rectis $Pp$, $Qq$, $Rr$ sese in puncto $A$ normaliter decussantibus determinentur, regiones illæ tribus litteris $P$, $Q$, $R$, vel majusculis vel minusculis definiri poterunt. Regio scilicet principalis, seu prima, $PQR$ erit spatium, quod parallelepipedum ex tribus rectis $AP$, $AQ$, $AR$ in infinitum productis formatum complectitur; & regio $Pqr$ erit spatium, quod parallelepipedum ex tribus rectis $AP$, $Aq$, $Ar$ in infinitum productis formatum includet. Positis ergo tribus variabilibus $AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$, erit utique $Ap = -x$, $Aq = -y$, & $Ar = -z$. Sequenti ergo modo octo has regiones numeris distinguemus, ut sit

| | prima I. | secunda II. |
| --- | --- | --- |
| | $PQR$ | $PQr$ |
| inter Coordinatas | $AP = +x$ | $AP = +x$ |
| | $AQ = +y$ | $AQ = +y$ |
| | $AR = +z$ | $Ar = -z$ |
| | tertia III. | quarta IV. |
| | $PqR$ | $pQR$ |
| inter Coordinatas | $AP = +x$ | $Ap = -x$ |
| | $Aq = -y$ | $AQ = +y$ |
| | $AR = +z$ | $AR = +z$ |
| | quinta V. | sexta VI. |
| | $Pqr$ | $qQr$ |
| inter Coordinatas | $AP = +x$ | $Ap = -x$ |
| | $Aq = -y$ | $AQ = +y$ |
| | $Ar = -z$ | $Ar = -z$ |
| | septima VII. | octava VIII. |
| | $pqR$ | $pqr$ |
| inter Coordinatas | $Ap = -x$ | $Ap = -x$ |
| | $Aq = -y$ | $Aq = -y$ |
| | $AR = +z$ | $Ar = -z$ |

17. Regiones istæ vel magis vel minus a se invicem discrepant. Primo nimirum dantur binæ regiones, quæ duas Coordinatas habent communes, unica discrepante; ideoque plano se invicem tangunt, quas vocemus *conjunctas*. Deinde, si duæ Coordinatæ fuerint diversæ, unicamque habeant communem, regiones Linea recta tantum se tangent, quas vocemus *disjunctas*. Tertio, si omnes Coordinatæ signis dissentiant, regiones tantummodo in puncto $A$ se tangent, hasque *oppositas* vocabimus. Quæ jam regiones cuique sint conjunctæ vel disjunctæ vel oppositæ sequens tabella exhibebit.

| *Regio.* | *Conjunctæ.* | | | *Disjunctæ.* | | | *Oppositæ.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *PQR* I | *PQr* II | *PqR* III | *pQR* IV | *Pqr* V | *pQr* VI | *pqR* VII | *pqr* VIII |
| *PQr* II | *PQR* I | *Pqr* V | *pQr* VI | *PqR* III | *pQR* IV | *pqr* VIII | *pqR* VII |
| *PqR* III | *Pqr* V | *PQR* I | *pqR* VII | *PQr* II | *pqR* VIII | *pQR* IV | *pQr* VI |
| *qQR* IV | *pQr* VI | *pqR* VII | *PQR* I | *pqr* VIII | *PQr* II | *PqR* III | *Pqr* V |
| *Pqr* V | *PqR* III | *PQr* II | *pqr* VIII | *PQR* I | *pqR* VII | *pQr* VI | *pQR* IV |
| *pQr* VI | *pQR* IV | *pqr* VIII | *PQr* II | *pqR* VII | *PQR* I | *Pqr* V | *PqR* III |
| *pqR* VII | *pqr* VIII | *pQR* IV | *PqR* III | *pQr* VI | *Pqr* V | *PQR* I | *PQr* II |
| *pqr* VIII | *pqR* VII | *pQr* VI | *Pqr* V | *pQR* IV | *PqR* III | *PQr* II | *PQR* I |

18. Patet ergo quamlibet regionem habere tres ſibi conjunctas, totidem disjunctas, unicamque oppoſitam, atque ex Tabula præcedente ſtatim perſpicitur quemadmodum quælibet regio ad aliam quamcunque ſit comparata. Ordo autem, quem numeri regiones denotantes in iſta Tabula tenent, attentione eſt dignus; qui ut melius in oculos incurrat, eoſdem numeros eodem ordine quadrato ſequenti incluſi.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 1 | 5 | 6 | 3 | 4 | 8 | 7 |
| 3 | 5 | 1 | 7 | 2 | 8 | 4 | 6 |
| 4 | 6 | 7 | 1 | 8 | 2 | 3 | 5 |
| 5 | 3 | 2 | 8 | 1 | 7 | 6 | 4 |
| 6 | 4 | 8 | 2 | 7 | 1 | 5 | 3 |
| 7 | 8 | 4 | 3 | 6 | 5 | 1 | 2 |
| 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Cujus indoles & proprietates levi attentione percipientur, uſus vero in ſequentibus uberius ob oculos ponetur.

19. Ante jam annotavimus ſi in æquatione variabilis $z$ ubique habeat pares dimenſiones, tum Superficiem duas eſſe habituram partes ſimiles & æquales; pars ſcilicet in regione prima æqualis erit parti in ſecunda, ſimilique modo regiones tertia & quinta, item quarta & ſexta, ac denique ſeptima & octava inter ſe convenient, uti quadrati binæ ſeries ab 1 & 2 incipientes exhibent. Sin autem in æquatione varialis $y$ ubique pares habeat dimenſiones, tum regio prima cum tertia, ſecunda cum quinta, quarta cum ſeptima, & ſexta cum octava congruet. Sed ſi $x$ in æquatione ubique pares habeat dimenſiones, tum regio prima cum quarta, ſecunda cum ſexta, tertia cum ſeptima, & quinta cum octava congruet. Scilicet 

*ſi in æquatione pares ubique habeat dimenſiones*

| | variabilis | |
|---|---|---|
| $z$ | $y$ | $x$ |
| convenient regiones | convenient regiones | convenient regiones |
| 1,2,3,4,5,6,7,8 | 1,2,3,4,5,6,7,8 | 1,2,3,4,5,6,7,8 |
| 2,1,5,6,3,4,8,7 | 3,5,1,7,2,8,4,6 | 4,6,7,1,8,2,3,5 |

20. Ut partes Superficiei in regionibus disjunctis prima & quinta ſitæ inter ſe ſint æquales, tum æquationem ita comparatam eſſe oportet, ut maneat eadem, etiamſi binæ variabiles $y$ & $z$ negativæ accipiantur. Hoc igitur eveniet ſi ambæ $y$ & $z$ in ſingulis æquationis terminis vel pares ubique vel impares dimenſiones junctim ſumtæ conſtituant. Quod ſi autem regio prima congruat cum quinta, tum ſecunda cum tertia, quarta cum octava, & ſexta cum ſeptima conveniet. Simili modo, ſi in æquatione pro Superficie binæ variabiles $x$ & $z$ vel parem ubique dimenſionum numerum, vel imparem ubique adimpleant, tum regio prima cum ſexta, ſecunda cum quarta, tertia cum octava, & quinta cum ſeptima congruet. Scilicet

APPEND. *Si in æquatione pro Superficie ubique vel pares vel ubique impares adimpleant dimensiones*

| | variabiles | |
|---|---|---|
| *y* & *z* | *x* & *z* | *x* & *y* |
| congruent regiones | congruent regiones | congruent regiones |
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| 5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4 | 6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3 | 7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2 |

*Quod si autem omnes tres variabiles* x, y, *&* z *junctim considerata ubique vel pares vel ubique impares teneant dimensiones, tum convenient regiones opposita*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

21. Si ex his conditionibus duæ vel tres simul in æquatione inesse deprehendantur, tum vel quaternæ vel omnes octo regiones partes Superficiei similes & æquales continebunt. Scilicet

*Si &* x *&* y *seorsim considerata ubique pares obtineant dimensiones,*
*tum sequentes quaternæ regiones congruent*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2.

*Si &* x *&* z *seorsim considerata ubique pares habeant dimensiones,*
*tum sequentes quaternæ regiones congruent*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3.

*Si variabiles* y & z *seorsim consideratæ ubique pares habeant dimensiones,* Cap. I.
*tum sequentes quaternæ regiones congruent*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8 |
| 2, | 1, | 5, | 6, | 3, | 4, | 8, | 7 |
| 3, | 5, | 1, | 7, | 2, | 8, | 4, | 6 |
| 5, | 3, | 2, | 8, | 1, | 7, | 6, | 4. |

22. Si una variabilium ubique pares habeat dimensiones, reliquæ vero binæ simul consideratæ vel ubique pares vel ubique impares constituant dimensiones, tum quoque quaternæ regiones congruent, sequenti modo.

*Si* z *ubique pares habeat dimensiones,* & x & y *ubique vel pares vel impares dimensiones constituant,*
*tum sequentes quaternæ regiones congruent*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8 |
| 2, | 1, | 5, | 6, | 3, | 4, | 8, | 7 |
| 7, | 8, | 4, | 3, | 6, | 5, | 1, | 2 |
| 8, | 7, | 6, | 5, | 4, | 3, | 2, | 1. |

*Si* y *ubique pares habeat dimensiones, atque* x & z *ubique vel pares vel impares dimensiones junctim constituant,*
*tum sequentes quaternæ regiones congruent*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8 |
| 3, | 5, | 1, | 7, | 2, | 8, | 4, | 6 |
| 6, | 4, | 8, | 2, | 7, | 1, | 5, | 3 |
| 8, | 7, | 6, | 5, | 4, | 3, | 2, | 1. |

*Si* x *ubique pares habeat dimensiones, atque* y & z *junctim consideratæ ubique vel pares vel impares constituant dimensiones,*
*tum sequentes quaternæ regiones congruent*

APPEND.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8 |
| 4, | 6, | 7, | 1, | 8, | 2, | 3, | 5 |
| 5, | 3, | 2, | 8, | 1, | 7, | 6, | 4 |
| 8, | 7, | 6, | 5, | 4, | 3, | 2, | 1. |

His ergo tribus caſibus ſimul omnes tres variabiles $x$, $y$, & $z$ junctim conſideratæ ubique vel pares vel impares dimenſiones adimplebunt.

23. Superſunt ſequentes caſus quaternarum regionum æqualium.

*Si* x & y } *ubique vel pares vel ubique impares dimenſiones*
& y & z } *conſtituant*,
*tum ſequentes quaternæ regiones congruent*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8 |
| 5, | 3, | 2, | 8, | 1, | 7, | 6, | 4 |
| 7, | 8, | 4, | 3, | 6, | 5, | 1, | 2 |
| 6, | 4, | 8, | 2, | 7, | 1, | 5, | 3. |

Eædem ergo ſimilitudines prodeunt, ſi inſuper binæ reliquæ variabiles $x$ & $z$ ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant, ita ut hæc conditio jam in propoſita contineatur. Portiones ergo Superficiei in quaternis disjunctis regionibus erunt inter ſe æquales, ſi in æquatione binæ quæque variabiles junctim conſideratæ ubique vel pares vel impares dimenſiones conſtituant. Cum autem tres dentur combinationes, notandum eſt ſi duæ expoſita proprietate fuerint præditæ, tum ſimul tertiam combinationem eadem proprietate eſſe gaviſuram.

24. Quod ſi ad conditiones, quæ quaternas regiones ſimiles & æquales produxerant, nova inſuper accedat in iis non contenta; quæ per ſe æqualitatem in binas regiones inferret, tum omnes prorſus regiones inter ſe fient æquales, atque Superficies conſtabit ex octo partibus inter ſe æqualibus & ſimilibus,

libus. Æquatio ergo pro hujusmodi Superficiebus omnes hactemus memoratas proprietates conjunctim possidebit: scilicet, singulæ variabiles $x$, $y$, $z$ seorsim consideratæ ubique pares constituent dimensiones; ex quo jam sequitur binas quasque junctim consideratas, atque etiam omnes tres simul sumtas, ubique pares esse constituturas dimensiones. CAP. I.

25. Utrum autem æquatio inter tres variabiles proposita una duabusve vel adeo tribus exhibitarum proprietatum sit prædita an non, id quidem, quod ad cujusvis variabilis pares dimensiones attinet, facile perspicitur. Neque difficilius est inquirere, utrum omnes variabiles simul consideratæ ubique vel pares vel impares constituant dimensiones. At utrum binæ tantum ad hanc proprietatem sint comparatæ, difficilius erit examinare. Ponatur in æquatione vel $x = nz$, vel $y = nz$, vel $x = ny$, ac dispiciatur utrum uno alterove casu æquatio resultet, in qua variabilis $z$ duobus prioribus casibus, vel $y$ postremo casu, ubique induat pares dimensiones: quod si eveniat, duæ variabiles junctim sumtæ ubique vel pares vel impares dimensiones constituant necesse est; hincque Superficies duas saltem habebit partes inter se similes & æquales.

## CAPUT II.

### *De Sectionibus Superficierum a planis quibuscunque factis.*

26. QUEMADMODUM intersectiones Linearum sunt puncta, ita Superficierum intersectiones sunt Lineæ vel rectæ vel curvæ. Intersectio duorum planorum est Linea recta, uti ex Elementis constat. Globi autem plano secti figura est Circulus. Plurimum autem ad cognitionem Superficiei affertur subsidii, si Lineas, quibus Superficies a datis planis intersecatur, noverimus. Hoc enim modo simul infinita Superficiei

APPEND. puncta innotescunt, cum modo præcedente singuli variabilis unius $z$ valores singula tantum Superficiei puncta præbeant.

TAB. XXXI. Fig. 121. 27. Cum igitur Superficies ad tria plana inter se normalia referamus, ante omnia investigari conveniet intersectiones Superficiei & horum planorum. Sumto ergo primo plano $APQ$, quod variabilibus $AP = x$, $AQ = y$ determinatur, (quoniam tertia variabilis $z$ designat distantiam cujusque Superficiei puncti ab hoc plano,) perspicuum est, si ponatur $z = 0$, ea Superficiei puncta inventum iri, quæ in ipso plano $APQ$ sint sita, atque idcirco æquatio residua inter $x$ & $y$ exhibebit Lineam, qua Superficies a plano $APQ$ intersecatur. Simili modo, si ponatur $y = 0$, æquatio inter $x$ & $z$ exprimet intersectionem Superficiei a plano $APR$ factam; atque, posito $x = 0$, æquatio inter $y$ & $z$ dabit intersectionem Superficiei & plani $AQR$.

28. Supra jam innuimus Superficiem Globi Centrum in puncto $A$ habentis, cujus radius $= a$, exprimi hac æquatione $xx + yy + zz = aa$; hoc ergo exemplo ad illustrationem harum intersectionum utar. Sit igitur $z = 0$, atque æquatio $xx + yy = aa$, exhibebit intersectionem Globi a plano $APQ$ factam, quam ergo patet esse Circulum Centrum $A$ & radium $= a$, habentem. Simili modo, facto $y = 0$, intersectio Globi a plano $APR$ facta erit Circulus æquatione $xx + zz = aa$, contentus. Eodemque modo, si ponatur $x = 0$, æquatio $yy + zz = aa$, parem Circulum pro intersectione plani $AQR$ indicat. Hæc quidem sunt satis nota, cum Sectiones Globi planis per ejus Centrum transeuntibus factæ omnes sint Circuli maximi, seu cum Globo radium communem habentes.

29. Haud difficilius erit Sectiones Superficiei per plana alia uni illorum planorum principalium parallela factas determinare. Concipiatur planum plano $APQ$ parallelum ab eoque distans intervallo $= h$, omnia ergo Superficiei puncta, quorum ab eodem plano $APQ$ distantia, quæ per variabilem $z$ indicatur, est $= h$, simul in isto plano parallelo sita erunt, ideoque in-

terſectionem formabunt. Pro hac ergo interſectione æquatio habebitur, ſi in æquatione pro Superficie ponatur $z = h$; tum enim habebitur æquatio inter binas Coordinatas orthogonales $x$ & $y$ naturam Sectionis exprimens. Eodem autem modo ſectiones, quæ per plana vel ipſi $APR$ vel $AQR$ parallela fiunt, definientur, unde ſuperfluum foret, quæ de uno dicta ſunt, in reliquis repetere. CAP. II.

30. Si ergo in æquatione pro Superficie inter tres Coordinatas $x$, $y$ & $z$, una earum $z$ ponitur conſtans $= h$, tum ſectio Superficiei per planum plano $APQ$ parallelum ab eoque intervallo $h$ diſtans formata oritur. Quod ſi ergo ſucceſſive huic litteræ $h$ omnes valores poſſibiles, tam affirmativi quam negativi, tribuantur, tum omnes ſectiones Superficiei, quæ a planis plano $APQ$ parallelis formantur, obtinentur: atque, cum tota Superficies hujuſmodi planis parallelis in partes infinitas diſſecari poſſit hocque modo omnes ſectiones cognoſcantur, ex iſtis omnibus ſectionibus tota Superficies innoteſcet. Omnes ſcilicet iſtæ ſectiones unica æquatione inter Coordinatas $x$ & $y$, conſtantem indeterminatam $h$ involvente, exprimentur; ex quo omnes iſtæ ſectiones erunt Lineæ vel ſimiles vel ſaltem affines una æquatione contentæ.

31. Omnes ergo ſectiones Superficiei plano $APQ$ parallelæ erunt inter ſe æquales, atque a planis $APR$, $AQR$ æquali modo trajicientur, ſi æquatio inter $x$ & $y$ ita fuerit comparata, ut eandem maneat quicunque valor ipſi $h$ tribuatur. Hoc autem evenire nequit, niſi variabilis $z$ cujus loco $h$ eſt poſita, prorſus deſit in æquatione pro Superficiei. Quo circa, ſi variabilis tertia $z$ in æquationem Superficiei omnino non ingrediatur, tum omnes ſectiones plano $APQ$ parallelæ erunt inter ſe æquales; quarum natura exprimetur ipſa Superficiei æquatione; cuippe, quæ duas tantum variabiles $x$ & $y$ involvit. Simili vero modo, ſi in æquatione pro Superficie vel variabilis $x$ vel $y$ deſit, tum omnes ſectiones vel plano $AQR$ vel plano $APR$ parallelæ inter ſe congruent.

APPEND.

32. Hujusmodi ergo Superficies non solum animo facile concipitur, sed etiam construitur atque in data materia efformatur. Ponamus enim in æquatione deesse variabilem $z$, ita ut æquatio tantum sit inter Coordinatas $AP = x$ & $AQ = PM = y$; ex hac in plano $APQ$ describatur Linea curva $BMD$. Quo facto concipiatur Linea recta infinita ad planum hoc perpetuo normalis secundum Lineam hanc curvam $BMD$ circumferri; atque hæc recta motu suo producet seu efformabit Superficiem, per eam æquationem indicatam. Unde perspicuum est, si Linea $BMD$ fuerit Circulus, tum Superficiem ex eo ortam fore Cylindri recti; sin autem Linea $BMD$ fuerit Ellipsis, tum Superficiem Cylindri scaleni generari. Quod si Linea $BMD$ non fuerit continua, sed ex pluribus rectis conflata figuram exhibens rectilineam, tum Superficies resultabit prismatica.

TAB. XXXI. Fig. 122.

33. Quod hoc Superficierum genus Cylindri & omnia Prismata in se complectitur, universum hoc genus Superficierum appellari conveniet *cylindricum*, seu *prismaticum*; singulæ autem species sub hoc genere contentæ determinabuntur per figuram planam $BMD$, ex qua, modo ante descripto, sint ortæ: atque ista figura $BMD$ *Basis* appellabitur. Quoties ergo in æquatione pro Superficie una trium variabilium $x$, $y$, $z$ deest, tum Superficies hac æquatione contenta erit cylindrica seu prismatica. Quod si autem duæ variabiles $y$ & $x$ simul desint; tum ob $x =$ Constanti, Linea $BMD$ abibit in rectam ad Axem $AD$ normalem, atque propterea Superficies fiet plana normalis ad planum $APQ$.

34. Post hoc Superficierum genus maxime notari meretur id, quod oritur ex æquatione inter tres variabiles $x$, $y$ & $z$ homogenea, seu in qua tres istæ variabiles ubique eundem dimensionum numerum constituunt, cujusmodi est $zz = mxz + xx + yy$. Hinc enim omnes sectiones, quæ fiunt per plana uni ex tribus principalibus parallela, erunt figuræ inter se similes. Namque, si tribuatur ipsi $z$ valor constans $h$, manifestum est æquationem $hh = mhx + xx + yy$, si pro $h$ succes-

five alii aliique valores tribuantur, infinitas continere figuras inter se similes; quarum Parametri sint æquales, seu proportionales ipsi $h$. Cum igitur hæ sectiones non solum sint similes, sed etiam crescant in ratione distantiarum a plano $APQ$, Lineæ, quæ ex puncto $A$ per singularum sectionum puncta homologa ducuntur, erunt rectæ.

35. Proposita ergo hujusmodi æquatione inter tres variabiles $x$, $y$, & $z$ homogenea, tribuatur ipsi $z$ valor datus $AR = h$; sitque $TSsMm$ figura in plano ipsi $APQ$ parallelo & per punctum $R$ ducto, quam exhibebit æquatio inter $x$ & $y$, ita ut sit $RV = x$, & $VM = y$. Quod si ergo hæc sectio una $TSsMm$ fuerit descripta, concipiatur circa ejus Perimetrum circumduci Linea recta infinita perpetuo per punctum $A$ transiens; atque hæc recta motu suo describet Superficiem in æquatione proposita contentam. Perspicuum vero est, si figura $TSsMm$ fuerit Circulus Centrum in $R$ habens, tum prodire Conum rectum; sin $R$ non sit Centrum, conum scalenum: at, si illa figura fuerit rectilinea, orientur cujusque generis Pyramides. Quam ob rem Superficies, quæ in hoc æquationum generum continentur, hic *conicas* seu *pyramidales* vocabimus. TAB. XXXI. Fig. 123.

36. Ex his manifestum est, si æquatio inter tres variabiles $x$, $y$ & $z$ fuerit homogenea, atque adeo Superficies conica seu pyramidalis; tum non solum omnes sectiones uni plano principali $APQ$ parallelas inter se esse figuras similes, quarum Parametri sint distantiis sectionum a vertice $A$ proportionales; sed, ob eandem rationem, intelligitur quoque, omnes sectiones, quæ sint vel plano $APR$ vel plano $AQR$ parallelæ, eadem illa proprietate esse præditas, ut sint figuræ inter se similes, quarum latera homologa teneant distatiarum ab $A$ rationem. Infra vero ostendetur, omnes omnino sectiones hujusmodi Corporum, quæ sunt inter se parallelæ, seu quæ sunt parallelæ plano cuicunque per Verticem $A$ ducto, inter se quoque fore similes, earumque Parametros distantiis a vertice $A$ esse proportionales.

APPEND.

37. Latius patet genus Superficierum, ad quod nunc sum progressurus. Sit Z Functio quæcunque ipsius $z$; ac proponatur æquatio quæcunque homogenea inter tres variabiles $x$, $y$, & Z, Fiat Z = H, posita $z = h$: &, cum hoc casu prodeat æquatio homogenea inter $x$, $y$ & H, erunt omnes sectiones, plano $APQ$ parallelæ, figuræ inter se similes, quarum Parametri autem non distantiis $h$, sed earum Functionibus H erunt portionales. Ex quo Lineæ per harum sectionum puncta homologa ductæ non erunt Lineæ rectæ, sed Curvæ a Functionis $z$ ratione pendentes. Tum vero etiam hinc non sequitur, sectiones, quæ alio cuipiam plano sint parallelæ, fore inter se similes.

38. In hoc genere ambo præcedentia continentur. Si enim fuerit $Z = z$, seu $Z = \alpha z$, ob æquationem inter $x$, $y$ & $z$ homogeneam, oriuntur Superficies conicæ. Idem evenit, si fuerit $Z = \alpha + \beta z$; hoc tantum discrimine, quod Vertex Coni non in ipsum punctum $A$ cadat; scilicet, si fuerit $Z = \frac{b - z}{b}$, Vertex Coni ab $A$ distabit intervallo $b$. Quod si jam statuatur $b = \infty$, figura conica abibit in cylindricam, fietque $Z = 1$. Hinc æquatio pro Superficiebus cylindricis ita erit comparata, ut in ea variabiles $x$ & $y$ una cum constanti 1 ubique eundem dimensionum numerum adimpleant. Quomodocunque autem æquatio inter $x$ & $y$ fuerit comparata, si tertia variabilis $z$ in eam non ingrediatur, semper per unitatem homogeneitas impleri potest: unde, uti supra jam ostendimus, omnis æquatio una variabili carens exprimit Superficiem cylindricam.

39. Inter hæc Corpora, in quibus omnes sectiones, uni plano principali $APQ$ parallelæ, sunt figuræ similes, maxime notatu sunt digna ea, quorum istæ sectiones sunt Circuli Centra in eadem recta $AR$ ad planum $APQ$ normali habentes. Hujusmodi Corpora torno efformantur, indeque *tornata* appellantur. Pro hujusmodi ergo Corporibus æquatio generalis erit $ZZ = xx + yy$: quicunque enim valor variabili $z$ tribua-

tur, ut fiat $Z = H$, prodibit pro sectione plano $APQ$ parallela æquatio $HH = xx + yy$, quæ est pro Circulo radium $= H$ & Centrum in recta $AR$ habente. Si fuerit $ZZ = zz$, habebitur Conus rectus: sin $ZZ = aa$, Cylindrus; &, si $ZZ = aa - zz$ prodibit Globus, quæ sunt species præcipuæ Corporum tornatorum.

40. Contemplemur ejusmodi Corpora, quorum omnes sectiones $PTV$ normales ad Axem $AP$ sint Triangula, horumque Apices $T$ in Linea recta $DT$ Axi $AP$ parallela sitæ. Sit $AVB$ Basis hujus Corporis, seu ejus sectio in plano $APQ$ facta, quæ sit Curva quæcunque. Sit distantia rectæ $DT$ ab Axe $AB$, nempe $AD, = c$: positisque, ut hactenus, tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$; erit $PV$ Functio quæpiam ipsius $x$: sit ea $PV = P$: erit, ob triangula $VQM$, $VPT$ similia, $P : c = P - y : z$; seu $z = c - \frac{cy}{P}$. Pro hujusmodi ergo Corporibus æquabitur $\frac{c - z}{y}$ Functioni cuipiam ipsius $x$. Differunt igitur hæc Corpora a conicis, quod desinant in aciem rectam $DT$, cum conica desinant in cuspidem. Si Basis $AVB$ ponatur Circulus, Corpus resultans a WALLISIO fusius est pertractatum, atque *Cono-cuneus* appellatum. TAB. XXXII. *Fig.* 124.

41. Sint, ut modo, omnes sectiones Axi $AB$ normales $PTV$ triangula ad $P$ rectangula, quorum Vertice autem $T$ constituant Curvam quamcunque $AT$: Basis autem sit figura $AVB$. Positis tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; erit in Curva $AVB$, recta $PV$ Functio quædam ipsius $x$ quæ sit $= P$: tum vero erit $PT$ quoque Functio ipsius $x$, quæ sit $= Q$; quibus positis erit TAB. XXXII. *Fig.* 125.

$$P : Q = P - y : z;$$

ideoque $z = Q - \frac{Qy}{P}$, seu $Pz + Qy = PQ$, vel $\frac{z}{Q} + \frac{y}{P} = 1$, vel constanti. Quod si ergo in æquatione ambæ

APPEND. variabiles $y$ & $z$ una plures dimensiones nusquam constituant, tum Corpus ad hoc genus pertinebit, quod hic descripsimus.

TAB. XXXII. Fig. 126. 42. Quoniam jam sumus contemplati ea Corpora, quorum omnes sectiones, uni plano principali parallelæ, sunt inter se similes: nunc ea consideremus, in quibus omnes istiusmodi sectiones sint figuræ inter se saltem affines; seu, quæ, sumtis Abscissis homologis, habeant Applicatas inter se proportionales. Sint igitur hujusmodi Corporis tres sectiones principales $ABC$, $ACD$, & $ABD$, quarum isti $ACD$ omnes sectiones parallelæ debeant esse figuræ affines. Quare in ea ponatur Basis $AC = a$, & altitudo $AD = b$; sumtisque Coordinatis $Aq = p$, & $qm = q$, sit $q$ Functio quæcunque ipsius $p$. Concipiatur nunc sectio quæcunque parallela $PTV$, posito intervallo $AP = x$; eritque Basis $PV =$ Functioni ipsius $x$, quæ sit $= P$, & altitudo $PT =$ Functioni ipsius $x$, quæ sit $= Q$. Vocetur jam $PQ = y$ & $QM = z$; atque, ex affinitatis natura, erit $a : p = P : y$ & $b : q = Q : z$; seu $y = \frac{Pp}{a}$, & $z = \frac{Qq}{b}$.

43. Quod si ergo datæ fuerint omnes tres sectiones principales Corporis, $ABC$, $ACD$, & $ABD$; hinc natura ipsius Corporis determinabitur, quod habeat omnes sectiones, ipsi $ACD$ parallelas, simul eidem affines. Primum enim dantur P & Q Functiones ipsius $x$; tum vero est $q$ Functio ipsius $p$; unde, ex binis variabilibus $x$ & $p$, definiuntur ambæ variabiles $y$ & $z$. Verum, si æquationem inter tres Coordinatas $x$, $y$ & $z$ desideremus; quoniam $q$ est Functio ipsius $p$; seu, quia datur æquatio inter $p$ & $q$, in hac æquatione substituatur $p = \frac{ay}{P}$, & $q = \frac{bz}{Q}$; sicque, ob P & Q Functiones ipsius $x$, orietur æquatio inter tres Coordinatas $x$, $y$ & $z$, qua natura Corporum ad hoc genus pertinentium exprimetur. Patet autem, posito $x = 0$, fieri oportere $P = a$ & $Q = b$.

44. Si

44. Si in æquatione pro Superficie duæ variabiles $y$ & $z$ ubique eundem dimensionum numerum constituant, tum omnes sectiones ad Axem $AP$ normales erunt figuræ rectilineæ. Posito enim pro $x$ valore quocunque constante, prodibit æquatio inter $y$ & $z$ homogenea, quæ unam pluresve Lineas rectas indicat. Cum igitur numerus dimensionum, qui a binis $y$ & $z$ constituitur, ubique sit idem, vel par erit vel impar; & hanc ob rem, uti supra §. 20. ostensum est, hujusmodi Corpora binas habebunt partes inter se æquales. Scilicet portiones in regionibus prima & quinta inter se erunt similes, tum vero etiam in regione secunda & tertia, & ita de ceteris, uti Tabella loco citato indicat.

45. Jam plures hic contemplati sumus Corporum species, in quibus dantur infinitæ sectiones rectilineæ; veluti hanc ultimo pertractatam, & cylindricas atque conicas. Hæ vero ita sunt comparatæ ut sectiones per Axem $AP$ factæ sint rectilineæ; hoc autem genus latius patet. Sit enim $AKMP$, sectio Corporis per Axem $AP$ facta, ad angulum $MPV = \varphi$; positis $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, erit $\frac{z}{y}$ Tangens anguli $\varphi$; & recta $PM = \frac{z}{\text{sin.}\,\varphi}$. Quod si jam Linea $KM$ sit recta, debebit esse $\frac{z}{\text{sin.}\,\varphi} = \alpha x + \beta$; ubi $\alpha$ & $\beta$ erunt constantes ab angulo $\varphi$ pendentes: ideoque erunt Functiones nullius dimensionis ipsarum $y$ & $z$. Sint R & S hujusmodi Functiones: eritque $x = \text{R}z + \text{S}$; seu $x = \text{R}y + \text{S}$. Vel, denotante T Functionem unius dimensionis, & S nullius dimensionis ipsarum $y$ & $z$, omnia hujusmodi Corpora continebuntur in hac æquatione generali $x = \text{T} + \text{S}$. TAB. XXXII. Fig. 117.

46. Quæcunque autem fuerit proposita Superficies, cujus natura per æquationem inter tres variabiles $x$, $y$, & $z$ definiatur, facile erit ejus sectionem quamvis secundum Axem $AP$ factam determinare. Sit enim angulus $VPM$, quo ista

APPEND. sectio $AKMP$ ad planum $ACVP$ inclinatur, $=\varphi$; & ponatur recta $PM = v$, quæ erit Applicata sectionis quæsitæ; quo facto habebitur $QM = z = v.\,sin.\,\varphi$ & $PQ = y = v.\,cos.\,\varphi$. Quod si ergo in æquatione pro Superficie loco variabilium $y$ & $z$ isti valores $v.\,cos.\,\varphi$ & $v.\,sin.\,\varphi$ substituantur, orietur æquatio inter duas variabiles $x$ & $v$, qua natura sectionis $AKMP$ exprimetur. Simili vero modo omnes quoque sectiones, quæ fiunt secundum alterutrum binorum reliquorum Axium principalium $AQ$ vel $AR$, invenientur. Tres enim isti Axes $AP$, $AQ$ & $AR$, a quibus tres variabiles $x$, $y$ & $z$ pendent, ita inter se sunt permutabiles, ut perpetuo, quicquid de eorum uno docetur, ad binos reliquos transferatur.

TAB. XXXI. Fig. 121.

47. Sumto ergo plano $APQ$ pro norma, ad quod omnes sectiones Superficiei referantur; sectio quæcunque plano facta vel erit parallela huic plano, vel ad id erit inclinata; hocque casu planum sectionis continuatum alicubi intersecabit planum $APQ$, atque intersectio istorum planorum erit Linea recta. Priori quidem casu, quo planum sectionis parallelum est plano $APQ$, natura sectionis innotescet tribuendo quantitati $z$ valorem constantem. Posteriori vero casu, quo planum sectionis ad planum $APQ$ inclinatur, naturam sectionis adhuc tantum definire licet, vel recta $AP$ vel recta $AQ$ fuerit intersectio plani secantis cum plano $APQ$. Ad omnes ergo omnino sectiones eruendas superest, ut quascunque alias binorum illorum planorum intersectiones contemplemur.

TAB. XXXIII. Fig. 128.

48. Sit recta $ES$, Axi $AP$ parallela, intersectio plani secantis cum plano $APQ$: angulusque inclinationis $QSM$, quo planum secans $ESM$ ad planum $APQ$ inclinatur, ponatur $=\varphi$, & distantia $AE$ vocetur $=f$. Cum jam sit $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit $ES = x$, & $QS = y + f$. Quod si ergo sectio ad rectam $ES$ tanquam Axem referatur, erit Abscissa $ES = x$, Applicata vero $SM$ ponatur $= v$; unde, ob angulum $QSM = \varphi$, obtinebitur $QM = z = v.\,sin.\,\varphi$, & $SQ = y + f = v.\,cos.\,\varphi$, hincque $y = v.\,cos.\,\varphi - f$. Quare, si in æquatione pro Superficie

inter $x$, $y$, & $z$, substituatur $y = v.\,cos.\,\varphi - f$ & $z = v.\,sin.\,\varphi$, orietur æquatio inter Coordinatas $x$ & $v$ sectionis $ESM$; quæsitæ. Si intersectio $ES$ esse, normalis ad Axem $AP$; tum, quia foret parallela alteri Axi principali in plano $APQ$ existenti, permutandis variabilibus $x$ & $y$, sectio eodem modo invenietur. CAP. II.

49. Habeat jam intersectio $ES$ in plano $APQ$ positionem quamcunque; cui recta $AE$, ad Axem $AP$ normalis, occurrat in puncto $E$. Tum ducatur $ETX$ Axi $AP$ parallela, & ponatur $AE = f$, & angulus $TES = \theta$. Sumtis porro tribus variabilibus $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; ex $Q$ ad $ES$ ducatur normalis $QS$, & jungatur, recta $MS$, erit angulus $QSM$ inclinatio plani secantis ad planum $APQ$, qui ponatur $= \varphi$. Deinde vero sint sectionis quæsitæ Coordinatæ $ES = t$ & $SM = v$. Ex $S$ ad $EX$ & $QP$ productam ducantur perpendicula $ST$ & $SV$; eritque $QM = z = v.\,sin.\,\varphi$; $QS = v.\,cos.\,\varphi$; $SV = v.\,cos.\,\varphi.\,sin.\,\theta$, & $QV = v.\,cos.\,\varphi.\,cos.\,\theta$. Postea vero, erit $ST = VX = t.\,sin.\,\theta$, & $ET = t.\,cos.\,\theta$. Ex his colligitur tandem $AP = x = t.\,cos.\,\theta + v.\,cos.\,\varphi.\,sin.\,\theta$, & $PQ = y = v.\,cos.\,\varphi.\,cos.\,\theta - t.\,sin.\,\theta - f$; qui valores, si loco $x$, $y$ & $z$ substituantur, dabunt æquationem pro sectione quæsita. TAB. XXXIII. Fig. 129.

50. Data ergo æquatione pro Solido quocunque, ex ea facile elici potest æquatio pro Sectione ejus quacunque plana. Ac primo quidem perspicuum est, si æquatio pro Solido inter tres Coordinatas $x$, $y$ & $z$, fuerit algebraica, tum quoque omnes ejus sectiones fore Curvas algebraicas. Deinde vero, cum æquatio inter Coordinatas sectionis $t$ & $v$ oriatur, ponendo in æquatione pro Solido $z = v.\,sin.\,\varphi$, $x = t.\,cos.\,\theta + v.\,cos.\,\varphi.\,sin.\,\theta$, & $y = v.\,cos.\,\varphi.\,cos.\,\theta - t.\,sin.\,\theta - f$, manifestum est in æquatione pro quavis sectione Coordinatas $t$ & $v$ plures dimensiones obtinere non posse, quam in æquatione pro Solido tres Coordinatæ $x$, $y$ & $z$ constituant. Fieri tamen quandoque potest ut æquatio pro sectione ad ordinem

APPEND. inferiorem referatur; ſupremis ſcilicet membris, poſt ſubſtitutionem, ſe tollentibus.

51. Si igitur in æquatione pro Superficie tres variabiles $x$, $y$ & $z$ unicam tantum conſtituant dimenſionem, ita ut æquatio ſit hujuſmodi $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$; tum omnes hujus Superficiei ſectiones erunt Lineæ rectæ. Erit autem hoc caſu Superficies plana; uti, cum attendenti facile patebit, tum infra clarius oſtendetur: atqui ex Elementis notum eſt ſectionem duorum planorum Lineam rectam eſſe oportere. Simili modo hinc intelligitur omnium Solidorum, quorum natura hac generali æquatione contineatur

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \epsilon xz + \zeta yz + ax + by + cz + ee = 0;$$

ſingulas ſectiones, niſi ſint Lineæ rectæ, Lineas ſecundi ordinis eſſe debere, neque ullam dari ſectionem, cujus natura per æquationem ſecundi gradus exprimi nequeat.

---

## CAPUT III.

### *De ſectionibus Cylindri, Coni & Globi.*

52. QUONIAM hæc Corpora in Elementis Stereometriæ conſiderari ſolent, eorum ſectiones hic antea inveſtigari conveniet, quam ad Solida alia minus nota progrediamur. Primum igitur, Cylindrorum duæ occurrunt ſpecies in Elementis, *rectorum* ſcilicet ac *ſcalenorum*. Cylindrus *rectus* vocatur, cujus omnes ſectiones ad Axem normales ſint Circuli inter ſe æquales, atque Centra in eadem Linea recta diſpoſita habentes. Cylindrus autem *ſcalenus* ſectiones ad Axem, non normales ſed ſub dato angulo inclinatas, habet circulares; quæ affectio commodius ita exprimetur, ut dicamus Cylindrum obliquum ſeu ſcalenum eſſe cujus omnes ſectiones

ad Axem normales sint Ellipses æquales, quarum Centra in eadem Linea recta, quæ Axis Cylindri vocatur, sint posita.

53. Sit igitur Cylindrus, sive rectus sive scalenus, cujus Axis $CD$ perpendiculariter insistat plano tabulæ; sitque ejus Basis $AEBF$, seu sectio a plano tabulæ formata, vel Circulus vel Ellipsis. Assumam vero hanc Basin esse Ellipsin quamcunque, Centrum in $C$ & Axes conjugatos $AB$ & $EF$ habentem; quoniam, quæ de Cylindro scaleno tradentur, facillime ad rectum accommodabuntur. Ponatur ergo alter semiaxis $AC = BC = a$, alter vero $CE = CF c =$; positis nunc tribus Coordinatis $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Ellipsis, $aacc = aayy + ccxx$; quæ eadem æquatio exprimet naturam Cylindri, cum tertia variabilis $z$, ob omnes sectiones plano $CPQ$ parallelas inter se æquales, in æquationem non ingrediatur. TAB. XXXIII. Fig. 130.

54. Hujus ergo Cylindri omnes sectiones Basi parallelæ eidem erunt similes & æquales. Scilicet Circuli in Cylindro recto & Ellipses in scaleno. Tum vero sectiones, quæ fiunt secundum plana ad $APQ$ normalia, erunt Lineæ rectæ, binæ inter se parallelæ, quæ, ubi Cylindrus tangetur a plano, in unum coalescent; atque adeo imaginariæ evadunt, si planum Cylindro prorsus non occurrat. Hoc ipsum ex æquatione sponte sequitur; si enim vel $x$ vel $y$ vel $x \pm \alpha y$ ponatur constans ad denotandam intersectionem plani secantis & Basis, tum æquatio duas habebit radices simplices. Sicque determinavimus jam sectiones omnes, quæ fiunt per plana, uni trium planorum principalium parallela.

55. Ad naturam reliquarum sectionum indagandam, ponamus planum secans cum plano Basis intersectionem constituere rectam Lineam $GT$, quæ primo sit parallela alteri Axi conjugato $EF$, seu ad alterum $AB$ productum in $G$ normalis. Hoc posito, sit distantia $CG = f$, & inclinatio plani secantis $GTM$ ad Basim mensuretur angulo $= \varphi$. Occurrat planum secans $GTM$ Axi Cylindri in $D$; &, ducta recta $DG$, erit

APPEND. $DGC = \varphi$, ac propterea $DG = \frac{f}{cos. \varphi}$ & $CD = \frac{f. fin. \varphi}{cos. \varphi}$. Ex sectionis quæsitæ puncto quovis $M$ ducatur $MT$ parallela ipsi $DG$: atque, ob $TQ = f - x$, & angulum $QTM = \varphi$, erit $TM = \frac{f - x}{cos. \varphi}$ & $QM = \frac{(f - x). fin. \varphi}{cos. \varphi} = z$. Ducatur $MS$ parallela ipsi $TG$, ideoque normalis in $DG$, erit $MS = TG = PQ = y$, & $DS = \frac{x}{cos. \varphi}$.

56. Sumantur nunc rectæ $DS$ & $SM$ pro Coordinatis sectionis quæsitæ; sitque $DS = t$, & $SM = u$. Hinc erit $y = u$, $x = t. cos. \varphi$: &, ob $z = \frac{(f - x). fin. \varphi}{cos. \varphi}$, erit $z = f. tang. \varphi - t. fin. \varphi$: Substituantur isti valores in æquatione pro Cylindro $aacc = aayy + ccxx$, atque resultabit pro sectione quæsita ista æquatio $aacc = aauu + cctt (cos. \varphi)^2$: quæ indicat sectionem fore Ellipsin Centrum in puncto $D$ habentem, cujus alter Axis principalis in rectam $DG$ cadat, alter vero ad hunc sit normalis. Erit vero semiaxis in rectam $DG$ cadens (facto $u = o$) $= \frac{a}{cos. \varphi}$. Vel, ducatur recta $BH$ parallela ipsi $GD$, erit $BH = \frac{a}{cos. \varphi}$ alter semiaxis sectionis quæsitæ, alter vero conjugatus erit $= c = CE$.

57. Erit ergo sectio Cylindri hoc modo orta Ellipsis, cujus semiaxes conjugati erunt $\frac{a}{cos. \varphi}$ & $c$. Quod si ergo in Basi $AEBF$ fuerit $AC = a$ semiaxis major; tum, ob $\frac{a}{cos. \varphi}$ majorem quam $a$, sectiones erunt Ellipses magis oblongæ, quam Basis. Sin autem fuerit $c$ minor quam $a$: seu, si intersectio $GT$ fuerit Axi majori Basis parallela, tum fieri potest ut in sectione ambo Axes fiant inter se æquales, atque adeo sectio Circulus evadat. Eveniet hoc si fuerit $\frac{a}{cos. \varphi} = c$, seu $cos. \varphi =$

$\frac{a}{c}$. Cum igitur ſit in Triangulo $BCH$ ad $C$ rectangulo angulus $CBH = \varphi$, erit $cof.\ \varphi = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{BH}$. Quare, ſi ſumatur $BH = CE$, ſectiones erunt Circuli, quod cum duplici modo fieri queat, rectam $BH = CE$ ſive ſupra ſive infra conſtituendo, binæ exiſtent ſectionum circularium ſeries, quæ ad Axem $CD$ oblique erunt inclinatæ; ex quo hujuſmodi Cylindri ſcaleni appellantur. CAP. III.

58. Sit nunc recta $GT$, utcunque oblique poſita, interſectio plani ſecantis cum Baſi, ad quam ex Centro Baſis $C$ demittatur perpendiculum $GC = f$; & ponatur angulus $BCG = \theta$; ſitque angulus inclinationis $CGD = \varphi$, cui æqualis erit angulus $QTM$, ducta $QT$ ad $GT$ normali. Erit ergo $DG = \frac{f}{cof.\ \varphi}$, & $CD = \frac{f.\ fin.\ \varphi}{cof.\ \varphi}$. Sit $M$ punctum in ſectione quæſita, unde ad Baſin perpendiculum $MQ$ hincque porro ad Axem $QP$ demittatur; ita ut, vocatis $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, fit $aacc = aayy + ccxx$. Ducantur porro ad interſectionem $GT$ normales $PV$, $QT$; erit $GV = x.\ fin.\ \theta$, $PV = f - x.\ cof.\ \theta$; &, ob angulum $QPW = \theta$, fiet $QW = y.\ fin.\ \theta$, $PW = VT = y.\ cof.\ \theta$, & $QT = f - x.\ cof.\ \theta + y.\ fin.\ \theta$. Denique, ducta $MT$, ob angulum $MTQ = \varphi$, erit $TM = \frac{z}{fin.\ \varphi}$ & $QT = \frac{z.\ cof.\ \varphi}{fin.\ \varphi}$. TAB. XXXIV. Fig. 131.

59. Compleatur parallelogrammum rectangulum $GSMT$; & vocetur $DS = t$, $SM = GT = u$: eritque $u = GV + VT = x.\ fin.\ \theta + y.\ cof.\ \theta$. At, ob $QT = f - x.\ cof.\ \theta + y.\ fin.\ \theta$, erit $QT - CG = y.\ fin.\ \theta - x.\ cof.\ \theta$, ex quo fit $DS = TM - DG = \frac{y.\ fin.\ \theta - x.\ cof.\ \theta}{cof.\ \varphi} = t$. Cum igitur ſit $x.\ fin.\ \theta + y.\ cof.\ \theta = u$, & $y.\ fin.\ \theta - x.\ cof.\ \theta = t.\ cof.\ \varphi$, habebitur $y = u.\ cof.\ \theta + t.\ fin.\ \theta.\ cof.\ \varphi$, & $x = u.\ fin.\ \theta - t.\ cof.\ \theta.\ cof.\ \varphi$. Qui valores in æquatione $aacc = aayy + ccxx$ loco $x$ & $y$ ſubſtituti dabunt.

APPEND.

$$aacc = \frac{aauu\,(cos.\,\theta)^2 + 2aaut.\,fin.\,\theta.\,cof.\,\theta.\,cof.\,\varphi + aatt\,(fin.\,\theta)^2\,(cof.\,\varphi)^2}{ccuu\,(fin.\,\theta)^2 - 2ccut.\,fin.\,\theta.\,cof.\,\theta.\,cof.\,\varphi + cctt\,(cof.\,\theta)^2\,(cof.\,\varphi)^2}$$

quam æquationem patet eſſe ad Ellipſin, cujus Centrum ſit in $D$, at Coordinatæ $DS$ & $SM$ ad Axes principales non ſint normales, niſi ſit $q = c$ ſeu Cylindrus rectus.

TAB. XXXIV. Fig. 132. 60. Ad hanc ſectionem propius cognoſcendam, ſit $aMebf$ Curva, cujus æquatio eſt inventa inter Coordinatas $DS = t$ & $MS = u$; ſitque, brevitatis ergo iſta æquatio $aacc = \alpha uu + 2\beta tu + \gamma tt$; ita, ut pro caſu præſente, habeatur

$$\alpha = aa\,(cof.\,\theta)^2 + cc\,(fin.\,\theta)^2$$

&

$$\beta = (aa - cc).\,fin.\,\theta.\,cof.\,\theta.\,cof.\,\varphi$$

atque

$$\gamma = aa\,(fin.\,\theta)^2\,(cof.\,\varphi)^2 + cc\,(cof.\,\theta)^2\,(cof.\,\varphi)^2.$$

Sint hujus ſectionis $ab$ & $ef$ Axes principales conjugati, ductaque ad eorum alterutrum Applicata $Mp$, vocetur $Dp = p$ & $Mp = q$; ac ponatur angulus $aDH = \zeta$; erit $u = p.\,fin.\,\zeta + q.\,cof.\,\zeta$ & $t = p.\,cof.\,\zeta - q.\,fin.\,\zeta$, quibus valoribus ſubſtitutis, fiet

$$aacc = \begin{matrix} +\alpha\,(fin.\,\zeta)^2 \\ +2\beta.\,fin.\,\zeta.\,cof.\,\zeta \\ +\gamma.\,(cof.\,\zeta)^2 \end{matrix}\; pp \;\begin{matrix} +2\alpha.\,fin.\,\zeta.\,cof.\,\zeta \\ +2\beta.\,(cof.\,\zeta)^2 \\ -2\beta.\,(fin.\,\zeta)^2 \\ -2\gamma.\,fin.\,\zeta.\,cof.\,\zeta \end{matrix}\; pq \;\begin{matrix} +\alpha\,(cof.\,\zeta)^2 \\ -2\beta.\,fin.\,\zeta.\,cof.\,\zeta \\ +\gamma.\,(fin.\,\zeta)^2 \end{matrix}\; qq$$

61. Hæc jam æquatio cum referatur ad Diametrum orthogonalem, coëfficiens ipſius $pq$ debet eſſe $= 0$: unde, ob $2.\,fin.\,\zeta.\,cof.\,\zeta = fin.\,2\zeta$, & $(cof.\,\zeta)^2 - (fin.\,\zeta)^2 = cof.\,2\zeta$, fiet $(\alpha - \gamma).\,fin.\,2\zeta + 2\beta\,cof.\,\zeta\,2 = 0$: ideoque $tang.\,2\zeta = \frac{2\beta}{\gamma - \alpha}$: unde angulus $aDH$, ac proinde poſitio Diametrorum principalium cognoſcitur. Hinc porro ipſi ſemiaxes definiuntur, hoc modo.

$aD =$

$$aD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\sin.\zeta)^2 + 2\beta.\sin.\zeta.\cos.\zeta + \gamma(\cos.\zeta)^2)}}$$

&

$$eD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\cos.\zeta)^2 - 2\beta.\sin.\zeta.\cos.\zeta + \gamma(\sin.\zeta)^2)}}.$$

62. Quia eſt $2\beta = \frac{2(\gamma - \alpha).\sin.\zeta.\cos.\zeta}{\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2}$, erit, valore hoc in expreſſionibus inventis ſubſtituto,

$$aD = \frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\gamma.\cos.\zeta^2 - \alpha.\sin.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2.\cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha+\gamma).\cos.2\zeta - \alpha + \gamma)}}$$

&

$$eD = \frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\alpha.\cos.\zeta^2 - \gamma.\sin.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2.\cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha+\gamma).\cos.2\zeta + \alpha - \gamma)}}.$$

Horum ergo ſemiaxium productum erit

$$aD.eD = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{\sqrt{(2\alpha\gamma(1+(\cos.2\zeta)^2) - \alpha\alpha + \gamma\gamma)(\sin.2\zeta)^2)}}.$$

At, cum ſit

$$(\gamma - \alpha).\sin.2\zeta = 2\beta.\cos.2\zeta$$

erit

$$(\alpha\alpha + \gamma\gamma)(\sin.2\zeta)^2 = 4\beta\beta(\cos.2\zeta)^2 + 2\alpha\gamma(\sin.2\zeta)^2$$

ideoque

$$aD.eD = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{\sqrt{(4\alpha\gamma(\cos.2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\cos.2\zeta)^2)}} = \frac{aacc}{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)}} = \frac{ac}{\cos.\phi}.$$

63. Simili modo, cum ſint quadrata

$$aD^2 = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{(\alpha+\gamma).\cos.2\zeta - \alpha + \gamma}$$

&

$$eD^2 = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{(\alpha+\gamma).\cos.2\zeta + \alpha - \gamma},$$

erit

$$aD^2 + eD^2 = \frac{4aacc.(\alpha+\gamma)(\cos.2\zeta)^2}{4\alpha\gamma(\cos.2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\cos.2\zeta)^2} = \frac{(\alpha+\gamma)aacc}{\alpha\gamma - \beta\beta}.$$

APPEND.

Hincque elicitur

$$aD + eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha+\gamma+2\sqrt{(\alpha\gamma-\zeta\zeta)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma-\zeta\zeta)}}$$

&

$$aD - eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha+\gamma-2\sqrt{(\alpha\gamma-\zeta\zeta)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma-\zeta\zeta)}}$$

Semiaxes ergo $aD$ & $eD$ erunt radices hujus æquationis

$$(\alpha\gamma-\zeta\zeta)x^4 - (\alpha+\gamma)\,aaccxx + a^4c^4 = 0,$$

at eſt

$$\sqrt{(\alpha\gamma-\zeta\zeta)} = ac.\,cof.\,\varphi.$$

64. Cum ſit $aD.\,eD = \frac{ac}{cof.\,\varphi}$, atque $\varphi$ ſit angulus quem planum ſecans cum plano baſis conſtituit, hinc ſequens elegans Theorema conſequimur.

## THEOREMA.

« *Si Cylindrus quicunque ſecetur plano quocunque, erit rectangulum Axium ſectionis ad rectangulum Axium Baſis Cylindri, uti ſecans anguli, quem planum ſectionis cum plano Baſis conſtituit, ad ſinum totum.* »

Quare, cum omnia parallelogramma circa Diametros conjugatas deſcripta æqualia ſint rectangulis ex Axibus formatis, etiam parallelogramma iſta circa Baſin & ſectionem quamcunque Cylindri formata eandem inter ſe tenebunt rationem.

TAB. XXXV. Fig. 133. 65. Natura autem hujuſmodi ſectionum obliquarum Cylindri commodius ſequenti modo definiri poterit. Si fuerit Baſis Cylindri Ellipſis $AEBF$, cujus ſemiaxes $AC = BC = a$, $EC = CF = c$, atque recta $CD$ ad Centrum Baſis $C$ perpendicularis Axis Cylindri: ſecetur iſte Cylindrus plano, cujus cum plano Baſis interſectio ſit recta $TH$ ad Axem $AB$ productum utcunque oblique poſita, ad quam ex $C$ perpendiculum demittatur $CH$, ſitque angulus $GCH = \theta$. Tranſeat planum ſecans per Axis Cylindri punctum $D$; erit, ducta $DH$, angulus $CHD$ inclinatio plani ſecantis ad planum Baſis, qui angulus vocetur $= \varphi$. Poſita ergo $CG = f$, erit

$GH = f.\sin.\theta$; $CH = f.\cos.\theta$; $DH = \frac{f.\cos.\theta}{\cos.\phi}$, & $CD = \frac{f.\cos.\theta.\sin.\phi}{\cos.\phi}$. Hinc, ob triangulum $DCG$ ad $C$ rectangulum, erit $DG = \frac{f.\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\phi^2)}}{\cos.\phi}$, & anguli $DGH$ sinus $= \frac{\cos.\phi}{\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\phi^2)}}$, cosinus $= \frac{\sin.\theta.\cos.\phi}{\sqrt{(1+\sin.\theta.\sin.\phi^2)}}$ & tangens $= \frac{\cos.\theta}{\sin.\theta.\cos.\phi}$.

66. Jam, ex sectionis quæsitæ puncto quovis $M$ in Basin demittatur perpendicularis $MQ$; ductaque Applicata $QP$, sit $CP = x$, $PQ = y$, erit $aacc = aayy + ccxx$. Ducatur $QT$ ipsi $CG$ parallela, in eamque ex $G$ normalis $GR$; erit $GR = y$, & $QR = f - x$. Quoniam igitur angulus $TGR = GCH = \theta$, erit $GT = \frac{y}{\cos.\theta}$ & $TR = \frac{y.\sin.\theta}{\cos.\theta}$: unde fit $QT = f - x + \frac{y.\sin.\theta}{\cos.\theta}$. Ideoque, ob triangula $CDG$ & $QMT$ similia, erit $CG : DG = QT : TM$, & $CG : CG - QT = DG : DS$, ducta $MS$ parallela $GT$. Hinc erit $DS = \frac{(x.\cos.\theta - y.\sin.\theta)\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\phi^2)}}{\cos.\theta.\cos.\phi}$. Positis ergo $DS = t$, $MS = u$, erit $x.\cos.\theta - y.\sin.\theta = \frac{t.\cos.\theta.\cos.\phi}{\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\phi^2)}}$; $y = u.\cos.\theta$; unde æquatio inter $t$ & $u$ reperietur, quæ adhuc erit satis complicata.

67. Quod si autem, loco Axium principalium Basis, ducatur Diameter $EF$ interfectioni $TH$ parallela, ad eamque Diameter conjugata $AB$, quæ producta ipsi $TH$ occurrat in $G$. Tum vero maneant eadem, quæ ante posuimus $CG = f$; $GCH = \theta$; $CHD = \phi$, $CA = CB = m$, $CE = CF = n$; fueritque ducta $QP$ Diametro $EF$ parallela, & positis $CP = x$, $PQ = y$, ut sit $m^2n^2 = m^2y^2 + n^2x^2$, erit $GT = MS = y$; & $DS = \frac{DG.x}{CG} = \frac{x\sqrt{(1+\sin.\theta^2.\sin.\phi^2)}}{\cos.\phi}$. Quare, positis $DS = t$

APPEND. & $MS = u$, fiet $x = \frac{t. cos. \phi}{\sqrt{(1 + sin. \theta^2 . sin. \phi^2)}}$ & $y = u$, erit vero $\frac{CG}{DG}$ cosinus anguli $CGD$; unde, si ponatur angulus $CGD = \eta$, erit $x = t. cos. \eta$; ideoque pro sectione quaesita erit $mmnn = mmuu + nntt. cos. \eta^2$, ad Diametros conjugatas, Centro existente in $D$; eritque semidiameter in directione $DS = \frac{m}{cos. \eta}$ & alter $= n$. Anguli vero, quo hae Diametri invicem inclinantur $GSM$, tangens erit $= \frac{cos. \theta}{sin. \theta. cos. \phi}$ & cosinus $= \frac{sin. \theta. cos. \phi}{\sqrt{(1 + sin. \theta^2 . sin. \phi^2)}} = sin. \theta. cos. \eta$. Hocque pacto natura sectionis facillime cognoscitur.

TAB. XXXV. Fig. 134. 68. Expositis ergo sectionibus Cylindri, ad Conum progrediamur, sive rectum sive scalenum: eo vero tantum Conum scalenum a recto differre considero, quod in scaleno sectiones ad Axem Coni normales sint Ellipses sua Centra in Axe Coni habentes; dum in recto hae sectiones sunt Circuli. Sit igitur $OaebfO$ Conus quicunque Verticem in $O$ & Axem $Oc$ habens; quem ad planum tabulae pono normalem, ita ut tabula repraesentet planum per Coni Verticem $O$ ductum & ad Axem Coni $Oc$ normale. Ducantur per $O$ in plano tabulae rectae $AB$, $EF$ Axibus $ab$ & $ef$ cujusque sectionis Axi normalis parallelae. Quod si ergo ex sectionis $aebf$ puncto quocunque $M$ ad planum tabulae demittatur normalis $MQ$, & ex $Q$ ad $AB$ perpendiculum $PQ$; si ponantur $OP = x$, $PQ = y$, $QM = z$, erit quoque sectionis Abscissa $cp = x$, Applicata $pM = y$: unde, cum Axes $ab$, $ef$ ad $Oc = QM = z$, constantem teneant rationem, si ponatur $ac = bc = mz$ & $ec = fc = nz$, erit $m^2 n^2 zz = mmyy + nnxx$; quae est aequatio naturam Superficiei Conicae exprimens, inter tres variabiles $x$, $y$ & $z$.

69. Cum igitur omnes sectiones Axi $Oc$ normales sint Ellipses, uti ex aequatione $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$ (tribuendo

ipsi $z$ valorem constantem ) apparet ; simili modo facile cognoscentur sectiones , quæ vel ad rectam $AB$ vel $EF$ erunt normales. Si enim iste Conus secetur plano ad $AB$ normali & per punctum $P$ transeunte , posito $OP = a$ , ista pro sectione habebitur æquatio $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 a^2$ , inter Coordinatas $Pp = z$ , & $pM = y$ ; quam propterea patet esse Hyperbolam Centrum in $P$ habentem , cujus semiaxis transversus erit $= \frac{a}{m}$ , & semiaxis conjugatus $= \frac{na}{m}$. Pari modo , si $y$ ponatur constans , sectio rectæ $EF$ normalis intelligetur esse Hyperbola Centrum habens in ipsa recta $EF$. 

70. Si planum , quo Conus secatur , sit quidem perpendiculare ad planum $AEBF$ , at vero ad neutram Linearum $AB$ , $EF$ normale , facile quoque sectio Coni definitur. Secet enim hoc planum Basin $AEBF$ recta $BE$ , ac vocetur $OB = a$ , $OE = b$. Jam , ex puncto sectionis quovis $M$ demittatur normalis $MQ$ , & ex $Q$ Applicata $QP$ , ut sit $OP = x$ , $PQ = y$ , & $QM = z$ ; atque , ex natura Coni , $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$. Erit ergo $a : b = a - x : y$ , seu $y = b - \frac{bx}{a}$. Ponantur sectionis Coordinatæ $BQ = t$ , & $QM = z$ : erit $b : \sqrt{(aa + bb)} = y : t$ ; ideoque $y = \frac{bt}{\sqrt{(aa+bb)}}$ , & $a - x = \frac{at}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Sit $\sqrt{(aa + bb)} = c$ ; erit $y = \frac{bt}{c}$ ; $x = a - \frac{at}{c}$ , atque prodibit inter $t$ & $z$ sequens æquatio TAB. XXXVI. Fig. 135.

$$m^2 n^2 c^2 z^2 = m^2 b^2 tt + n^2 a^2 cc - 2nnaact + nnaatt.$$

Fiat $t - \frac{nnaac}{m^2 b^2 + n^2 a^2} = GQ = u$ , existente $BG = \frac{nnaac}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$ , & erit $m^2 n^2 c^2 z^2 = (m^2 b^2 + n^2 a^2)\, uu + \frac{m^2 n^2 a^2 b^2 c^2}{m^2 b^2 + n^2 a^2}$.

71. Erit ergo hæc Coni sectio Hyperbola Centrum habens

APPEND. in puncto $G$, cujus femiaxis tranfverfus erit $Ga = \frac{ab}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$; & femiaxis conjugatus $= \frac{mnabc}{m^2b^2 + n^2a^2}$. Afymtotæ vero hujus Hyperbolæ, quæ Axem $Ga$ in Centro $G$ decuffabunt, cum Axe $Ga$ facient angulum, cujus tangens eft $= \frac{mnc}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$. Quo ergo fectio fiat Hyperbola æquilatera, oportet effe $m^2n^2aa + m^2n^2b^2 = m^2b^2 + n^2a^2$, feu $\frac{b}{a} = tang.\ OBE = \frac{n\sqrt{(mm-1)}}{m\sqrt{(1-nn)}}$. Nifi ergo fit $\frac{mm-1}{1-nn}$ major nihilo, Hyperbola æquilatera hoc modo oriri nequit. In Cono recto, quidem ubi eft $m = n$, anguli, quem Afymtotæ cum Axe fectionis conftituunt, tangens erit $= m$, & angulus $=$ angulo $aOc$.

TAB. XXXV. Fig. 134.

TAB. XXXVI. Fig. 136.

72. Sit nunc fectio obliqua, ita tamen ut ejus interfectio $BT$ cum plano $AEBF$ fit normalis ad rectam $AB$. Ponatur $OB = f$, & angulus inclinationis plani ad planum Bafis, feu angulus $OBC = \varphi$, ita ut hoc planum fecans Axem Coni $OC$ in puncto $C$ trajiciat; erit $BC = \frac{f}{cof.\,\varphi}$; & $OC = \frac{f.\,fin.\,\varphi}{cof.\,\varphi}$. Ex fectionis quæfitæ puncto quovis $M$ ad $BT$ ducatur perpendicularis $MT$; tum vero ad planum Bafis perpendiculum $MQ$: & ex $Q$ ad $OB$ normalis $QP$: ita ut, pofitis $OP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, habeatur $m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2$. Ponantur pro fectione Coordinatæ $BT = t$, $TM = u$; erit, ob angulum $QTM = \varphi$, $QM = z = u.\,fin.\,\varphi$; $TQ = u.\,cof.\,\varphi = f - x$; unde fit $y = t$; $z = u.\,fin.\,\varphi$; & $x = f - u.\,cof.\,\varphi$; ideoque

$$m^2n^2u^2.\,fin.\,\varphi^2 = m^2t^2 + n^2(f - u.\,cof.\,\varphi)^2.$$

73. Ponatur $BC = \frac{f}{cof.\,\varphi} = g$, ut fiat $f = g.\,cof.\,\varphi$, erit $x = (g - u).\,cof.\,\varphi$; atque pro fectione erit

$m^2n^2u^2 \sin.\varphi^2 = m^2t^2 + n^2g^2.\cos.\varphi^2 - 2n^2gu.\cos.\varphi^2 + n^2u^2\cos.\varphi^2$. CAP. III.
Statuatur $u - \frac{g.\cos.\varphi}{\cos.\varphi^2 - m^2.\sin.\varphi^2} = SG = s$, ducta $MS$ parallela ipſi $BT$, ſumtaque $BG = \frac{g.\cos.\varphi^2}{\cos.\varphi^2 - m^2\sin.\varphi^2} = \frac{f.\cos.\varphi}{\cos.\varphi^2 - m^2\sin.\varphi^2} = \frac{f.\cos.\varphi}{1 - (1 + m^2).\sin.\varphi^2}$; ita ut Coordinatæ ſint $GS = s$ & $SM = t$, atque naſcetur hæc æquatio $m^2tt + nn(\cos.\varphi^2 - m^2.\sin.\varphi^2)ss - \frac{mmnnff\sin.\varphi^2}{(\cos.\varphi^2 - m^2.\sin.\varphi^2)} = 0$. Erit ergo Curva Sectio conica Centrum habens in $G$. Eritque ergo Parabola ſi Centrum $G$ in infinitum abit, quod fit ſi $tang.\varphi = \frac{1}{m}$; ſeu, ſi recta $BC$ fuerit lateri Coni $Oa$ parallela. Hoc vero caſu erit $mmtt + nnff - 2nnfu.\cos.\varphi = 0$: Vertex Parabolæ erit in $G$, ſumta $BG = \frac{f}{2\cos.\varphi}$; & Latus rectum erit $= \frac{2nnff.\cos.\varphi}{mm}$.

TAB. XXXV. Fig. 134.

TAB. XXXVI. Fig. 136.

74. Quoniam ſectio eſt Parabola, ſi fuerit $\cos.\varphi^2 - m^2.\sin.\varphi^2 = 0$; manifeſtum eſt eam fore Ellipſin, ſi ſit $\cos.\varphi^2$ major quam $m^2\sin.\varphi^2$, ſeu $tang.\varphi$ major quam $\frac{1}{m}$, quo quidem caſu recta $BC$ ſurſum converget cum latere Coni oppoſito $Oa$. Cum igitur ſit $BG = \frac{g}{1 - m^2.\,tang.\varphi^2}$, erit $BG$ major quam $BC$, exiſtente $G$ ſectionis quæſitæ Centro. Erit ergo ſectionis quæſitæ ſemiaxis in directione $BC$ poſitus $= \frac{mf.\sin.\varphi}{\cos.\varphi^2 - m^2.\sin.\varphi^2}$, alter vero ſemiaxis conjugatu $= \frac{nf.\sin.\varphi}{\sqrt{(\cos.\varphi^2 - m^2.\sin.\varphi^2)}}$, & ſemilatus rectum $= \frac{nn}{m}f.\sin.\varphi$. Unde ſectio erit Circulus, ſi fuerit $m = n\sqrt{(\cos.\varphi^2 - m^2.\sin.\varphi^2)}$ ſeu $mm = nn - nn(1 + mm).\sin.\varphi$; hincque fit $\sin.\varphi = \frac{\sqrt{nn - mm)}}{n\sqrt{(1 + mm)}} = \sin.OBC$, & $\cos.\varphi = \frac{m\sqrt{(1 + nn)}}{n\sqrt{(1 + mm)}}$. Niſi ergo ſit $n$ major quam $m$, nulla hujuſmodi ſectio eſſe poterit Circulus.

APPEND.

75. Si fuerit $m^2 \sin.\varphi^2$ major quam $\cos.\varphi^2$, ſeu $\tan.\varphi$ major quam $\frac{1}{m}$; ita ut recta $BC$ cum latere Coni oppoſito $Oa$ ſurſum divergat, ſectio erit Hyperbola, cujus ſemilatus tranſverſum erit $= \frac{m f. \sin.\varphi}{-\cos.\varphi^2 + m^2 \sin.\varphi^2}$, & ſemilatus conjugatum $= \frac{n f. \sin.\varphi}{\sqrt{(m^2.\sin.\varphi^2 - \cos.\varphi^2)}}$; ac ſemilatus rectum $= \frac{n\,n}{m} f.\sin.\varphi$, & anguli, ſub quo Aſymtotæ Axem in Centro $G$ decuſſant, tangens erit $= \frac{n}{m}\sqrt{(m^2.\sin.\varphi^2 - \cos.\varphi^2)}$. Quare Hyperbola erit æquilatera ſi fuerit $m^2 n^2.\sin.\varphi^2 - n^2.\cos.\varphi^2 = m^2 = (m\,m + 1)\; n\,n.\sin.\varphi^2 - n\,n = m\,m$, ſeu $\sin.\varphi = \frac{\sqrt{(m\,m + n\,n)}}{n\sqrt{(1 + m\,m)}}$, & $\cos.\varphi = \frac{m\sqrt{(nn - 1)}}{n\sqrt{(1 + mm)}}$. Ad hoc ergo neceſſe eſt ut ſit $n$ major unitate, alioquin Hyperbola æquilatera per ſectionem hujuſmodi produci nequit.

76. Si Conus eſt rectus, ſeu $m = n$, tum omnes ſectiones, ad has, quas evolvimus referri poſſunt, quia poſitio rectæ $AB$ ab arbitrio noſtro pendet. At pro Cono ſcaleno ſupereſt, ut inveſtigemus ſectiones quæ a plano utcunque oblique ad rectam $AB$ poſito formantur. Sit igitur $BR$ interſectio plani ſecantis cum plano Baſis $AEBF$. Ponatur $OB = f$, angulus $OBR = \theta$, & angulus inclinationis ſecantis ad Baſin $= \varphi$; erit, demiſſo ex $O$ in $BR$ perpendiculo $OR$, $OR = f.\sin.\theta$ & $BR = f.\cos.\theta$. Tum, ducta in plano ſecante recta $RC$, erit, ob angulum $ORC = \varphi$, $RC = \frac{f.\sin.\theta}{\cos.\varphi}$ & $OC = \frac{f.\sin.\theta.\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$. Si jam ſectio ad Axem Coni $OC$ normalis in planum *Baſis* projiciatur, erunt ejus Axes principales ſecundum rectas $AB$ & $EF$ diſpoſiti, alterque erit ut $m$ alter ut $n$.

TAB. XXXVI. *Fig.* 137.

77. In hac ſectione projecta ducatur Diameter $ef$ parallela ipſi $BR$: erit angulus $BOe = \theta$; ſitque $aOb$ poſitio Diametri

metri ejus conjugatæ. Ponatur semidiameter $Oa = \mu$, $Ov = \nu$, erit 

$$\mu = \frac{\sqrt{(m^4 . \sin. \theta^2 + n^4 . \cos. \theta^2)}}{\sqrt{(m^2 . \sin. \theta^2 + n^2 . \cos. \theta^2)}}$$

&

$$\nu = \frac{m n}{\sqrt{(m^2 . \sin. \theta^2 + n^2 . \cos. \theta^2)}},$$

atque

$$tang.\ B O b = \frac{m n . \cos. \theta}{m m . \sin. \theta},$$

cujus anguli propterea erit

$$\text{Sinus} = \frac{n n . \cos. \theta}{\sqrt{(m^4 . \sin. \theta^2 + n^4 . \cos. \theta^2)}}$$

&

$$\text{Cosinus} = \frac{m m . \sin. \theta}{\sqrt{(m^4 . \sin. \theta^2 + n^4 . \cos. \theta^2)}}.$$

Jam est angulus $ObR = \theta + BOb$: ergo

$$\sin.\ ObR = \frac{m^2 . \sin. \theta^2 + n^2 . \cos. \theta^2}{\sqrt{(m^4 . \sin. \theta^2 + n^4 . \cos. \theta^2)}},$$

&

$$\cos.\ ObR = \frac{(m m - n n) . \sin. \theta . \cos. \theta}{\sqrt{(m^4 . \sin. \theta^2 + n^4 . \cos. \theta^2)}}.$$

At est

$$\mu \nu = \frac{m n . \sqrt{(m^4 . \sin. \theta^2 + n^4 . \cos. \theta^2)}}{m m . \sin. \theta^2 + n n . \cos. \theta^2}.$$

78. Cum igitur sit $OR = f . \sin. \theta$, erit

$$Ob = \frac{OR}{\sin.\ ObR} = \frac{f . \sin. \theta \sqrt{(m^4 . \sin. \theta^2 + n^4 . \cos. \theta^2)}}{m^2 . \sin. \theta^2 + n^2 . \cos. \theta^2}$$

&

$$Rb = \frac{(m m - n n) f . \sin. \theta . \cos. \theta}{m^2 . \sin. \theta^2 + n^2 . \cos. \theta^2}.$$

Hinc, ex triangulo $RbC$ ad $R$ rectangulo, erit anguli $CbR$ tangens $= \frac{m^2 . \sin. \theta^2 + n^2 . \cos. \theta^2}{(m^2 - n^2) . \sin. \theta . \cos. \theta . \cos. \phi}$: unde, angulus $CbR$ erit cognitus. Jam, ex puncto sectionis quovis $M$ ad rectam $RT$ ducatur $MT$ parallela ipsi $Cb$, atque ex $M$ ad $Cb$

APPEND. parallela $MS$ ipſi $RT$: vocenturque $bT = MS = t$; $bS = TM = u$; quæ, tanquam Coordinatæ obliquangulæ ſectionis quæſitæ ſpectentur, exiſtente anguli $bSM$ tangente $= \frac{m^2.\,\text{ſin.}\,\theta^2 + n^2.\,\text{coſ.}\,\theta^2}{(m^2.-n^2.\,\text{ſin.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\theta.\,\text{coſ.}\,\varphi}$. Patet ergo has Coordinatas fieri orthogonales in Cono recto, propterea quia fit $m = n$.

79. Ex puncto ſectionis $M$ ad planum $AEBF$ demittatur perpendiculum $MQ$; junctaque $TQ$ erit parallela Diametro $ab$; tum ex $Q$ ducatur ordinata $QP$ alteri Diametro $ef$ parallela. Atque, vocatis $OP = x$; $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Coni

$$\mu^2 \nu^2 z^2 = \mu^2 y^2 + \nu^2 x^2.$$

Namque, ſi per punctum $M$ concipiatur Coni ſectio Baſi parallela, erunt ejus ſemidiametri rectis $ab$ & $ef$ parallelæ $\mu z$ & $\nu z$. At, cum inventa ſint Trianguli rectanguli $COb$ latera $OC$ & $Ob$, erit Hypothenuſa

$$Cb = \frac{f.\,\text{ſin.}\,\theta \sqrt{(m^4.\,\text{ſin.}\,\theta^2 + n^4.\,\text{coſ.}\,\theta^2 - (m^2 - n^2)^2.\,\text{ſin.}\,\theta^2.\,\text{coſ.}\,\theta^2.\,\text{ſin.}\,\varphi^2)}}{(m^2.\,\text{ſin.}\,\theta^2 + n^2.\,\text{coſ.}\,\theta^2)\ \text{coſ.}\,\varphi}$$

& ob Triangula $TMQ$, $bCO$ ſimilia, erit

$$TM(u) : TQ(Ob - x) : QM(z) = bC : Ob : OC$$

ergo $x = Ob - \frac{Ob.\,u}{Cb}$; $z = \frac{OC.\,u}{Cb}$; & $y = t$; ideoque

$$\mu^2 \nu^2.\,OC^2.\,u^2 = \mu^2.\,Cb^2.\,t^2 + \nu^2.\,Ob^2\,(Cb - u)^2.$$

80. Æquatio hæc evoluta dabit hanc

$$0 = \mu^2.\,Cb^2.\,tt + \nu^2\,(Ob^2 - \mu^2.\,Oc^2)\,uu - 2\nu^2.\,Ob^2.\,Cb.\,u + \nu^2.\,Ob^2.\,Cb^2,$$

in qua ſi ponatur $u - \frac{Ob^2.\,Cb}{Ob^2 - \mu^2.\,Oc^2} = s$: ſeu, ſumta $bG = \frac{Ob^2.\,Cb}{Ob^2 - \mu^2.\,Oc^2} = \frac{Cb}{1 - (m^2.\,\text{ſin.}\,\theta^2 + n.\,\text{coſ.}\,\theta^2)\,\text{tang.}\,\varphi^2}$, & vocata

$GS = s$; erit $G$ Centrum ſectionis conicæ cujus æquatio inter Coordinatas $t$ & $s$ erit CAP. III.

$\mu^2 . Cb^2 . tt + \nu^2 (Ob^2 - \mu^2 . Oc^2) ss = \frac{\mu^2 . \nu^2 . Ob^2 . Oc^2 . Cb^2}{Ob^2 - \mu^2 . Oc^2}$,

cujus ſemidiameter tranſverſus erit $= \frac{\mu . Ob . Oc . Cb}{Ob^2 - \mu^2 . Oc^2}$, & ſemidiameter conjugatus $= \frac{\nu . Ob . Oc}{\sqrt{(Ob^2 - \mu^2 . Oc^2)}}$, & ſemilatus rectum $= \frac{\nu\nu . Ob . Oc}{\mu . Cb}$. Ceterum apparet ſi ſit *tang.* $\varphi$ minor quam $\frac{1}{\sqrt{(m^2 . \mathit{fin}. \theta^2 + n^2 . \mathit{cof}. \theta^2)}}$, ſeu *tang.* $\varphi$ minor quam $\frac{\nu}{mn}$, Curvam fore Ellipſin; ſi ſit *tang.* $\varphi = \frac{\nu}{mn}$, Parabolam; & ſi *tang.* $\varphi$ major quam $\frac{\nu}{mn}$, Hyperbolam.

81. Tertium corpus, cujus ſectiones plano factas hic inveſtigare conſtituimus, eſt Globus, cujus quidem omnes ſectiones planas Circulos eſſe ex Geometria elementari conſtat. Interim tamen quo methodus clarius perſpiciatur, quemadmodum ex data æquatione pro Solido quocunque ejus ſectiones quævis erui debeant, idem negotium hic analytice abſolvam quod vulgo ſynthetice tradi ſolet. Sit igitur $C$ Centrum Globi, per quod planum tabulæ tranſire concipiatur, ita ut ſectio hoc plano facta ſit Circulus maximus, cujus radius $CA = CB$, ponatur $= a$, qui ſimul erit radius Globi. Sit porro recta $DT$ interſectio plani ſecantis cum iſto plano tabulæ, ad quam ex $C$ ducatur normalis $CD$, quæ ſit $= f$, angulus autem inclinationis ſit $= \varphi$. TAB. XXXVII. Fig. 138.

82. Sit $M$ punctum ſectionis quæſitæ quodcunque; unde ad planum tabulæ demittatur perpendiculum $MQ$, hincque ad rectam $CD$ pro Axe aſſumtam perpendicularis $QP$. Quod ſi jam vocentur Coordinatæ $CP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; erit, ex natura Globi, $xx + yy + zz = aa$. Ducatur ex $M$ pariter ad rectam $DT$ normalis $MT$; & juncta $QT$, ob ambas $QT$ & $MT$ ad $DT$ normales, metietur angulus $MTQ$

APPEND. inclinationem plani secantis ad planum Basis, quæ est $= \varphi$. Quare si $DT$ & $MT$ tanquam Coordinatæ sectionis quæsitæ spectentur, vocenturque $DT = t$, $TM = u$, fiet $MQ = u. \sin. \varphi$; & $TQ = u. \cos. \varphi$. Erit ergo $CP = x = f - u. \cos. \varphi$; $PQ = y = t$; & $QM = z = u. \sin. \varphi$. Quibus valoribus substitutis emerget æquatio pro sectione Globi quæsita hæc

$$ff - 2fu. \cos. \varphi + uu + tt = aa.$$

83. Perspicuum jam est hanc æquationem esse pro Circulo. Namque si ponatur $u - f. \cos. \varphi = s$, fiet

$$ff. \sin. \varphi^2 + ss + tt = aa,$$

unde radius sectionis erit $= \surd (aa - ff. \sin. \varphi^2$. Quare, si ex $D$ Applicatæ $TM$ parallela ducatur $Dc$, in eamque ex Centro $C$ perpendiculum demittatur $Cc$, ob $CD = f$ & angulum $CDc = \varphi$, erit $Dc = f. \cos. \varphi$ & $Cc = f. \sin. \varphi$. Hinc, cum Coordinatæ $s$ & $t$ ad Centrum referantur, erit punctum $c$ Centrum sectionis, & $\surd (CB^2 - Cc^2)$ radius istius Circuli, uti ex Elementis est manifestum. Simili autem modo omnium aliorum Solidorum, dummodo eorum natura sit æquatione inter tres variabiles expressa, sectiones quæcunque planis factæ investigari poterunt.

TAB. XXXVII. *Fig.* 139. 84. Quo tamen tota operatio melius perspiciatur, proponatur Solidum quodcunque, cujus natura sit expressa æquatione inter ternas Coordinatas $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$; quarum illæ positæ sint in plano tabulæ hæc vero $z$ sit ad planum normalis. Secetur jam hoc Solidum plano quocunque, cujus cum plano tabulæ intersectio sit recta $DT$, & inclinationis angulus $= \varphi$. Ponatur recta $AD = f$, angulus $ADE = \theta$; eritque, demisso ex $A$ in $DE$ perpendiculo $AE$, $AE = f. \sin. \theta$ & $DE = f. \cos. \theta$. Tum, ex sectionis quæsitæ puncto $M$ ad $DT$ ducatur perpendicularis $MT$; junctaque $QT$, æquabitur angulus $MTQ$ inclinationi datæ $\varphi$. Quare,

si $DT$ & $TM$ pro Coordinatis sectionis quaesitae accipiantur, & vocentur $DT = t$, $TM = u$, erit $QM = u. fin. \varphi$, & $TQ = u. cof. \varphi$. 

85. Ex $T$ ad Axem $AD$ demittatur perpendiculum $TV$; atque, ob angulum $TDV = \theta$, erit $TV = t. fin. \theta$ & $DV = t. cof. \theta$. Quia porro angulus $TQP$ est $= \theta$, erit $PV = u. fin. \theta. cof. \varphi$ & $PQ - TV = u. cof. \theta. cof. \varphi$. Ex his itaque Coordinatae $x$, $y$, & $z$ sequenti modo per $t$ & $u$ definientur ut sit

$$AP = x = f + t. cof. \theta - u. fin. \theta. cof. \varphi$$
&
$$PQ = y = \quad t. fin. \theta + u. cof. \theta. cof. \varphi$$
atque
$$QM = z = u. fin. \varphi.$$

Quare, si isti valores in aequatione inter $x$, $y$, & $z$ pro Solido data substituantur, obtinebitur aequatio inter $t$ & $u$, seu Coordinatas sectionis quaesitae, cujus adeo natura innotescet. Convenit autem hic modus fere cum eo, quo supra §. 50. usi sumus.

---

## CAPUT IV.

*De immutatione Coordinatarum.*

86. QUEMADMODUM aequationes pro Lineis curvis in eodem plano sitis in innumerabiles formas diversas transformari possunt; immutandis cum Abscissarum initio, tum Axis positione, tum utroque: ita in praesenti negotio multo adhuc major varietas locum habet. Primum enim in eodem plano, in quo binae Coordinatae sunt sitae, hae infinitis modis variari possunt. Deinde vero hoc ipsum planum, quod duas

APPEND. continet Coordinatas mutari, ficque prior varietas in infinitum augeri poterit. Data fcilicet æquatione inter tres Coordinatas inter fe normales, perpetuo inveniri poteft alia æquatio inter tres quafcunque alias Coordinatas pariter inter fe normales, quarum pofitio refpectu priorum infinities magis variari poteft, quam fi duæ tantum effent Coordinatæ, uti ufu venit in æquationibus Linearum curvarum.

87. Ponamus primum folum Abfciffarum $x$ initium in Axe mutari, ita ut binæ reliquæ Coordinatæ $y$ & $z$ maneant eædem; atque nova Abfciffa quantitate conftante ab $x$ difcrepabit. Sit igitur nova Abfciffa $= t$, erit $x = t \pm a$ quo valore in æquatione pro Superficie fubftituto prodibit æquatio inter tres Coordinatas $t$, $y$ & $z$ quæ, etfi a priori diverfa, tamen pro eadem erit Superficie. Simili modo reliquæ Coordinatæ $y$ & $z$ quantitatibus conftantibus augeri minuive poterunt: atque, fi ponatur $x = t + a$; $y = u \pm b$ & $z = v \pm c$, orietur æquatio inter tres variabiles $t, u,$ & $v$ pro eadem Superficie: atque adeo hæ novæ Coordinatæ prioribus erunt parallelæ. Interim hoc modo æquatio pro Superficie, etfi eft magis generalis, tamen non multum variatur.

TAB. XXXVII. Fig. 140. 88. Quoniam tres Coordinatæ orthogonales, quarum æquatio naturam Superficiei exprimit, ad tria plana inter fe normalia referuntur, ponamus planum unum in quo binæ Coordinatarum $x$ & $y$ capiuntur, invariatum manere, in eo autem Lineam quamcunque aliam $CT$, præter $AP$, pro Axe affumi. Cum igitur priores Coordinatæ pro Axe $AP$ effent $AP = x$, $P = y$, $QM = z$, pro novo Axe $CQ$ manebit Coordinata $QM = z$ eadem, at binæ reliquæ evadent $CT = t$, $TQ = u$, ducta $QT$ ad novum Axem $CT$ normali. Ad æquationem igitur inter has novas Coordinatas $t$, $u$ & $z$ inveniendam, ducatur $CR$ parallela priori Axi $AP$, tum ex $C$ ad eum perpendicularis ducatur $CB$, ac vocetur $AB = a$, $BC = b$; & angulus $RCT = \zeta$. Denique ducatur $TR$ normalis ad $CR$ & ex $T$ in $QP$ productam perpendiculum $TS$.

89. His factis; in Triangulo $TCR$ erit $TR = t.\,fin.\,\zeta$, $CR = t.\,cof.\,\zeta$: in Triangulo autem $QTS$, cujus angulus ad $Q$ pariter erit $= \zeta$, fiet $TS = u.\,fin.\,\zeta$, & $QS = u.\,cof.\,\zeta$. Ex his jam obtinebitur $AP = x = CR + TS - AB = t.\,cof.\,\zeta + u.\,fin.\,\zeta - a$; & $QP = QS - TR - BC = y = u.\,cof.\,\zeta - t.\,fin.\,\zeta - b$. Quod si ergo isti valores loco $x$ & $y$ in æquatione pro Superficie proposita substituantur, resultabit æquatio inter ternas novas Coordinatas $t$, $u$ & $z$, qua ejusdem Superficiei natura exprimetur. Hæc igitur nova æquatio multo latius patentem speciem præ se feret, cum in eam ingrediantur tres novæ constantes arbitrariæ $a$, $b$ & angulus $\zeta$, quæ in priori æquatione non inerant. Hæcque erit æquatio generalis: quando quidem idem planum, in quo binæ Coordinatæ $x$ & $y$ versantur, retineatur.

90. Varietur nunc quoque planum, in quo binæ priores Coordinatæ $x$ & $y$ erant assumtæ: ac primo quidem ita ut intersectio novi plani cum priori $APQ$ incidat in ipsam rectam $AP$, quæ etiam pro novis Coordinatis tanquam Axis spectetur. Sit igitur $APT$ hoc novum planum, cujus ad prius $APQ$ inclinatio erit angulus $QPT$, qui ponatur $\eta$. Ex $M$ in $PT$ ducatur normalis $MT$, quæ simul in novum planum erit perpendicularis & vicem tertiæ Coordinatæ tenebit. Ponantur ergo tres novæ Coordinatæ $AP = x$, $PT = u$, & $TM = v$: &, ducta $TR$ ad $PQ$, & $TS$ ad $QM$ normali, erit $TR = u.\,fin.\,\eta$, $PR = u.\,cof.\,\eta$; $TS = v.\,fin.\,\eta$ & $MS = v.\,cof.\,\eta$. Hinc erit $PQ = y = u.\,cof.\,\eta - v.\,fin.\,\eta$ & $QM = z = v.\,cof.\,\eta + u.\,fin.\,\eta$, qui valores, in æquatione proposita pro $y$ & $z$ substituti, dabunt æquationem inter tres novas Coordinatas $x$, $u$ & $v$, qua ejusdem Superficiei natura exprimetur. TAB. XXXVII. Fig. 141.

91. Cadat nunc intersectio novi plani secantis cum plano $APQ$ in Lineam quamcunque $CT$, sitque $\eta$ inclinatio istorum planorum; ac sumatur recta hæc $CT$ pro Axe in hoc plano. Quæratur primum æquatio inter Coordinatas in plano $APQ$ ad Axem $CT$ relatas, quæ ex præcedentibus ita re- TAB. XXXVII. Fig. 140.

APPEND. perietur, ut, positis $AB = a$, $BC = b$, angulo $TCR = \zeta$, & Coordinatis $CT = p$, $TQ = q$, & $QM = r$, ut fit $x = p.\,cof.\zeta + q.\,fin.\zeta - a$; $y = q.\,cof.\zeta - p.\,fin.\zeta - b$, & $z = r$. Nunc vero ex §. præcedente, positis novis Coordinatis $t$, $u$, & $v$, fiet $p = t$; $q = u.\,cof.\,\eta - v.\,fin.\,\eta$, & $r = v.\,cof.\,\eta + u.\,fin.\,\eta$. His substitutis, Coordinatæ principales $x$, $y$, $z$ ex novis ita determinabuntur ut fit

$$x = \quad t.\,cof.\zeta + u.\,fin.\zeta\,cof.\eta - v.\,fin.\zeta.\,fin.\eta - a$$

&

$$y = -\,t.\,fin.\zeta + u.\,cof.\zeta\,cof.\eta - v.\,cof.\zeta.\,fin.\eta - b$$

atque

$$z = \quad u.\,fin.\eta + v.\,cof.\eta.$$

TAB. XXXVII. Fig. 140. 92. Sumatur jam in plano isto novo, in quo Coordinatæ $t$ & $u$ sunt sitæ, alia Linea quæcunque pro Axe; sicque orietur æquatio generalissima pro Superficie proposita. Sint in hunc finem $AP$, $PQ$, $QM$ Coordinatæ $t$, $u$, & $v$, quas modo invenimus; ita ut $AP$ repræsentet intersectionem memorati plani cum plano in quo principales Coordinatæ $x$ & $y$ positæ concipiuntur. Sitque recta $CT$ novus Axis ad quem novæ generalissimæ Coordinatæ, quas quærimus, referantur, quæ vocentur, $CT = p$, $TQ = q$, & $QM = r$. Præterea, sunt $AB$ & $BC$ Lineæ constantes, angulus autem $CTR$ ponatur $= \theta$. His positis erit ex §. 89.

$$t = \quad p.\,cof.\theta + q.\,fin.\theta - AB$$

&

$$u = -\,p.\,fin.\theta + q.\,cof.\theta - BC$$

atque

$$v = r.$$

Qui valores si substituantur in expressionibus §. præcedentis reperietur

$x =$

$$x = p(\cos.\zeta.\cos.\theta - \sin.\zeta.\cos.\eta.\sin.\theta) + q(\cos.\zeta.\sin.\theta + \sin.\zeta.\cos.\eta.\cos.\theta) - r.\sin.\zeta\sin.\eta + f$$

&

$$y = -p(\sin.\zeta.\cos.\theta + \cos.\zeta.\cos.\eta.\sin.\theta) - q.(\sin.\zeta.\sin.\theta - \cos.\zeta.\cos.\eta.\cos.\theta) - r.\cos.\zeta.\sin.\eta + g$$

atque

$$z = -p.\sin.\eta.\sin.\theta + q.\sin.\eta.\cos.\theta + r.\cos.\eta + h,$$

ubi $f$, $g$ & $h$ sunt Lineæ constantes ex compositione earum, quæ in calculum sunt introductæ, ortæ.

93. Patet ergo æquationem generalissimam pro quavis Superficie sex constantes arbitrarias complecti, quæ utcunque determinentur, æquatio perpetuo ejusdem Superficiei naturam exprimet. Quantumvis autem simplex & succincta fuerit æquatio pro Superficie inter Coordinatas $x$, $y$, $z$, si ex ea conflettur æquatio generalissima inter $p$, $q$, & $r$, ea ob ingentem constantium arbitrariarum numerum necessario fiet maxime intricata: præsertim, si altiores dimensiones ipsarum $x$, $y$, & $z$ affuerint. Vix igitur dari poterit casus, in quo conveniret ad æquationem generalissimam assurgere. Quanquam enim ea utilitas inde percipi posset, ut idoneo modo constantibus illis definiendis æquatio simplicissima redderetur; tamen, ob calculi prolixitatem, hic labor plerumque fieret molestissimus. Interim tamen in sequentibus ista methodus æquationes generalissimas formandi usu non carebit, quoniam inde egregiæ proprietates elicientur ac demonstrabuntur.

94. Quanquam autem æquatio generalissima plerumque sit maxime complicata; tamen, si ad dimensiones, quas Coordinatæ junctim sumtæ constituunt, spectemus, earum numerus perpetuo æqualis est numero dimensionum, quas primæ Coordinatæ $x$, $y$ & $z$ confecerunt. Sic, cum æquatio pro Sphæra $xx + yy + zz = aa$ sit duarum dimensionum, æquatio quoque generalissima non plures quoque quam duas continebit dimensiones Coordinatarum $p$, $q$, & $r$. Hinc numerus dimensionum, quas Coordinatæ in æquatione cujuspiam Superficiei

APPEND. conſtituunt, nobis ſuppeditat eſſentialem characterem naturæ iſtius Superficiei; propterea quod, utcunque poſitio Coordinatarum varietur, perpetuo tamen idem dimenſionum numerus emergit. Similis ſcilicet hic ratio circa Superficies obſervatur, quam ſupra in Lineis curvis deprehendimus; unde eas in certos ordines diviſimus. Eodem ergo modo conveniet Superficies ſecundum dimenſiones Coordinatarum in ordines diſponere: eritque nobis Superficies ordinis primi, cujus æquatio unicam tantum dimenſionem complectitur: ad ordinem ſecundum Superficiem referemus, in cujus æquatione Coordinatæ ad duas dimenſiones aſſurgunt; atque ita porro ex dimenſionum numero ſequentes ordines conſtituentur.

95. Si jam cum his conferantur ea, quæ ſupra de inventione ſectionum planarum cujuſque Superficiei tradita ſunt, ordinem ſectionum perpetuo cum ordine ad quem Superficies pertinet, congruere deprehendemus. Sit enim æquatio pro Superficie quacunque propoſita inter Coordinatas $x$, $y$, & $z$, ad ordinem $n$ pertinens, ſectionis autem ejus cujuſvis Coordinatæ normales ſint $t$ & $u$. Atque ſupra, §. 85, vidimus æquationem inter $t$ & $u$ inveniri, ſi in æquatione pro Superficie ſequentes valores ſubſtituantur

$$x = f + t.\,cos.\,\theta - u.\,sin.\,\theta.\,cos.\,\phi$$
&
$$y = t.\,sin.\,\theta + u.\,cos.\,\theta.\,cos.\,\phi$$
atque
$$z = u.\,sin.\,\phi.$$

Manifeſtum igitur eſt æquationem pro ſectione plures dimenſiones aſſequi non poſſe, quam habebat æquatio inter $x$, $y$, & $z$; ſed perpetuo totidem prodituras eſſe dimenſiones.

96. Superficies ergo primi ordinis alias ſectiones a plano factas habere nequit præter Lineas primi ordinis, ſeu rectas. Deinde, ex ſectione Superficiei ſecundi ordinis aliæ Lineæ non oriuntur niſi ſecundi ordinis, ſeu Sectiones conicæ; eſt

enim Superficies conica quoque secundi ordinis, cum ejus aequatio sit CAP.IV.

$$zz = \alpha xx + \beta yy.$$

Simili modo, ex Superficie tertii ordinis per sectiones planas prodibunt Lineae tertii ordinis, atque ita porro. Fieri tamen quandoque potest, ut aequatio pro sectione quapiam divisores admittat; quo casu sectio erit composita ex duabus pluribusve Lineis inferiorum ordinum. Sic, sectio Coni per Verticem facta constabit ex duabus Lineis rectis, quae tamen conjunctim Lineam secundi ordinis mentiuntur, uti supra annotavimus.

97. Constitutis igitur Superficierum ordinibus, investigemus prae reliquis eas Superficies, quae ad ordinem primum pertinent. Aequatio ergo earum naturam exprimens erit $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$, cujus cum omnes sectiones plano factae sint Lineae rectae, perspicuum est has Superficies non planas esse non posse: si enim haberent convexitatem vel concavitatem, necessario daretur sectio curvilinea. Quanquam enim in reliquis ordinibus dantur ejusmodi Superficies, quarum certae quaedam sectiones sunt Lineae rectae, (uti in Cylindro, Cono, aliisque, usu venire vidimus,) tamen in iis sectiones curvilineae non excluduntur. Similis scilicet hic occurrit ratio, qualem in Lineis observavimus: quemadmodum enim Linea, quae a Linea recta in pluribus uno punctis nullo modo secari potest, est necessario recta; ita Superficies quae a plano secta semper dat Lineam rectam, necessario ipsa plana esse colligitur.

98. Ex aequatione autem generalissima ista indoles clarissime potest demonstrari Formetur enim ex aequatione $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ aequatio generalissima inter Coordinatas $p$, $q$, & $r$, secundum §. 92. Et, quoniam sex novae constantes arbitrariae inducuntur, nil obstat, quo minus eae ita determinentur, ut binarum Coordinatarum $p$, & $q$ coëfficientes evanescant, atque hujusmodi aequatio $r = f$ remaneat, ejusdem Superficiei naturam exprimens. Haec autem aequatio $r = f$ ostendet Superficiem propositam esse plano, in quo binae Coordinatae $p$ & $q$

APPEND. existunt, parallelam; ideoque ipsam planam: Effici quoque potest, ut fiat $r = 0$; sicque evidens erit, ipsum planum, in quo $p$ & $q$ assumuntur, esse Superficiem quæsitam.

TAB. XXXVIII Fig. 142.

99. Cum igitur constet Superficiem æquatione $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ expressam esse planam, opus est ut ejus positionem respectu plani, in quo Coordinatæ $x$ & $y$ assumuntur, definiamus. Sit igitur $M$ punctum quodcunque hujus Superficiei; atque tres Coordinatæ $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$. Ponatur primum $z = 0$, atque orietur æquatio $\alpha x + \beta y = a$, quæ exprimet intersectionem Superficiei quæsitæ cum plano $APQ$, quam patet esse Lineam rectam $BCR$, cujus positio respectu Axis $AP$ talis erit, ut sit recta $AB$ ad Axem $AP$ in plano $APQ$ normalis $= \frac{a}{\beta}$, & $AC = \frac{a}{\alpha}$: unde anguli $ACB$ tangens erit $= \frac{\alpha}{\beta}$: ideoque sinus $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$, & cosinus $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$. Tum, producatur $QP$ usque ad occursum rectæ $BC$ in $R$: atque, ob $CP = x - \frac{a}{\alpha}$, erit $CR = \frac{x\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\beta} - \frac{a\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\alpha\beta}$; & $PR = \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{a}{\beta}$.

100. Demittatur ex $Q$ ad $BC$ normalis $QS$: junctaque $MS$, patebit angulum $MSQ$ metiri inclinationem Superficiei propositæ ad planum $APQ$. Cum igitur sit $PR = \frac{\alpha x - a}{\beta}$, erit $QR = \frac{\alpha x + \beta y - a}{\beta} = \frac{-\gamma z}{\beta}$: &, ob angulum $RQS = ACB$, erit $QS = \frac{-\gamma z}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}$: unde fit anguli $QSM$ tangens $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\gamma}$; & propterea cosinus $= \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}}$. Superficies ergo quæsita ad planum, in quo versantur $x$ & $y$, inclinatur angulo, cujus tangens est $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{\gamma}$:

pari vero modo eadem Superficies ad planum Coordinatarum $x$ & $z$ inclinabitur angulo cujus tangens eſt $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)}}{\beta}$, atque ad planum Coordinatarum $y$ & $z$ angulo cujus tangens eſt $= \frac{-\sqrt{(\beta^2 + \gamma\ )}}{\alpha}$. Cap. V.

---

## CAPUT V.

### *De Superficiebus ſecundi Ordinis.*

101. Constitutis ergo Superficierum ordinibus ſecundum numerum dimenſionum, quas ſummæ trium Coordinatarum $x, y, z$ poteſtates in æquatione junctim ſumtæ adimplent; ſi proponatur pro Superficie æquatio algebraïca, ſtatim aſſignari poteſt ordo, ad quem illa Superficies referri debet. Cum igitur omnis Superficies primi ordinis oſtenſa ſit eſſe plana, in hoc Capite Superficies ſecundi ordinis examini ſubjiciam. In iis autem major ſtatim deprehenditur diverſitas, quam in Lineis ſecundi gradus, quod quidem cuique attendenti facile patebit. Operam igitur dabo ut hæc diverſa genera diſtincte exponam. In ordinibus vero altioribus tantopere multitudo generum increſcit, ut ab iis evolvendis prorſus abſtinere debeamus.

102. Quoniam natura Superficierum ſecundi ordinis exprimitur æquatione, in qua variabiles $x, y$ & $z$ ad duas dimenſiones aſſurgunt, Cylindrus & Conus, tam rectus quam ſcalenus, & Globus, quorum proprietates jam decripſimus, in hoc ſecundo ordine continentur. Omnes vero Superficies ad hunc ordinem pertinentes comprehenduntur in hac æquatione generali

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0.$$

Utcunque enim tres Coordinatæ accipiantur, æquatio ſemper

APPEND. in hac forma continebitur. Varia ergo Superficierum huc pertinentium genera a diversa coëfficientium relatione mutua pendebunt, qui, etsi eadem Superficies infinitis æquationibus exprimatur, tamen infinitam variarum Superficierum multitudinem suppeditabunt.

103. Quemadmodum in Lineis curvis planis præcipuam divisionem inde desumsimus, quod vel in infinitum extendantur, vel in spatio finito includantur; ita simili modo omnes Superficies ad quemcunque ordinem pertinentes in duas classes dividentur; ad quarum alteram referemus eas, quæ in infinitum abeunt, ad alteram vero, quæ in spatio finito continentur. Ita Cylindrus & Conus priori classi; Globus vero posteriori annumerabitur. Posterioris quidem classis nulla dabitur Superficies in ordinibus imparibus: cum enim quælibet Superficies imparis ordinis habeat sectiones planas ejusdem ordinis, curvæ autem imparium ordinum omnes in infinitum extendantur, necesse est, ut etiam ipsæ Superficies istorum ordinum in infinitum porrigantur.

104. Quoties autem quæpiam Superficies in infinitum extenditur, necesse est ut, ad minimum, una trium variabilium $x$, $y$ & $z$, in infinitum abeat. Quare, cum perinde sit quænam hoc casu infinita fieri assumatur, ponamus $z$ fieri infinitam, si quidem Superficies in infinitum porrigatur. Naturam ergo hujus partis in infinitum abeuntis investigaturi ponamus esse $z = \infty$: atque nunc potissimum spectari debet terminus primus $\alpha zz$, utrum is adsit an vero deficiat. Adsit ergo primum iste terminus in æquatione: atque præ eo termini $\eta z$ & $\kappa$ evanescent, habebiturque pro parte in infinitum excurrente hæc æquatio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \theta y + \iota x = 0,$$

ex qua porro omnes termini, qui non sunt infiniti, vel infinities minores saltem quam $\alpha zz$, evanescunt.

105. Statuamus omnes terminos, in quibus variabiles duas

tenent dimensiones adesse; quæcunque enim fuerit Superficies, in ejus æquatione generalissima semper omnes inerunt termini summarum dimensionum, neque idcirco hypothesis, qua omnes terminos duarum dimensionum adesse ponimus, universalitati solutionis ullam vim infert. Quando autem termini $yz$ & $xz$ adsunt, præ iis termini $\theta y$ & $\iota x$ evanescunt; relinqueturque hæc æquatio 

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0,$$

ex qua elicitur

$$z = \frac{-\beta y - \gamma x \pm \sqrt{((\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + (2\beta\gamma - 4\alpha\epsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx)}}{\alpha}.$$

Hac igitur æquatione natura portionis in infinitum extensæ exprimitur.

106. Si quam igitur Superficies habeat portionem in infinitum extensam, ea congruet cum portione infinita Superficiei, quæ exprimitur hac æquatione

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0,$$

ita ut hæc Superficies sit quasi Asymtota illius Superficiei æquatione generali expressæ. Quia vero in hac æquatione tres variabiles ubique duas habent dimensiones, erit ea pro Superficie conica, Verticem in initio Coordinatarum, ubi omnes simul evanescunt, habente: semper ergo exhiberi potest Superficies conica, quæ erit Asymtota Superficiei propositæ, si quidem in infinitum extenditur; seu cujus portio infinita cum Superficie proposita vel penitus congruit, vel intervallo tantum finito ab eo est remota. Uti ergo ramos Curvarum in infinitum abeuntes per Lineas rectas Asymtotas distinximus, ita Superficierum partes in infinitum extensas per Superficies conicas Asymtotas distinguere licebit.

107. Quoties ergo Superficies Asymtota conica erit realis, toties Superficies ipsa in infinitum extenditur; atque ita qui-

APPEND. dem ut utriusque partes infinitæ congruant; sicque ex natura Superficiei Asymtotæ natura ipsius Superficies propositæ colligi poterit. Quod si autem Superficies Asymtota fiat imaginaria, ipsa Superficies nullam habebit partem in infinitum extensam, sed tota spatio finito includetur. Ad Superficies ergo secundi ordinis, quæ in spatio finito contineantur, indagandas, tantum opus est, ut videamus quibus in casibus æquatio pro Superficie Asymtota fiat imaginaria; quod fit, si tota Superficies hæc in punctum unicum evanescit. Namque si ullam extensionem haberet, vel punctum extra Verticem situm, necessario in infinitum expandi deberet, propterea quod supra ostendimus, totam rectam quæ per verticem & unum Superficiei punctum ducitur, in ipsa Superficie esse positum.

108. Quando ergo Superficies conica Asymtota, hac æquatione expressa

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0,$$

in unicum punctum abit, omnes ejus sectiones per Verticem factæ pariter in idem punctum evanescere debent. Primum ergo, facto $z = 0$, æquatio $\delta yy + \epsilon xy + \zeta xx = 0$, debet esse impossibilis, nisi sit $x = 0$ & $y = 0$, quod evenit si fuerit $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$. Deinde idem evenire debet posito vel $x = 0$ vel $y = 0$: erit ergo $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$, & $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$. Nisi ergo in æquatione pro Superficie secundi ordinis

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

fuerit $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$, Superficies certo habebit partes in infinitum extensas.

109. Neque vero hæ tres conditiones sufficiunt ad Superficiem in spatium finitum includendam: requiritur insuper ut valor ipsius $z$ ex æquatione Asymtotica supra erutus fiat imaginarius; quod fit si ista expressio

$(\beta\beta -$

$(\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + 2(\beta\gamma - 2\alpha\epsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx$ CAP. V.

perpetuo obtineat valorem negativum, si quidem pro utraque variabili $x$ & $y$ valores quicunque præter o substituantur. Quod, cum $\beta\beta - 4\alpha\delta$ & $\gamma\gamma - 4\alpha\zeta$ sint quantitates negativæ, fiet si $(\beta\gamma - 2\alpha\epsilon)^2$ minor quam $(\beta\beta - 4\alpha\delta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)$; hoc est, si fuerit $\alpha\epsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ minor quam $\beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$; si quidem $\alpha$ habuerit valorem affirmativum, quoniam illam æquationem per $\alpha$ divisimus. Quod si vero $\alpha$ habeat valorem affirmativum, ob superiores æquationes $4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; & $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$; coëfficientes $\delta$ & $\zeta$ erunt affirmativi.

110. Superficies ergo secundi ordinis in spatio finito continebitur, si in ejus æquatione quatuor sequentes conditiones locum habeant; nempe si sit

$4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$

&

$\alpha\epsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ minor quam $\beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$.

Hincque genus primum Superficierum secundi ordinis definimus, ad quod eæ species omnes pertinent, quæ non in infinitum excurrunt, sed in spatio finito includuntur. Ad hoc ergo genus pertinet Globus, cujus æquatio est

$$zz + yy + xx = aa,$$

cum enim hic sit $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\zeta = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; $\epsilon = 0$, quatuor inventis conditionibus omnibus satisfit. Generalius vero hic pertinebit æquatio ista

$$\alpha zz + \delta yy + \zeta xx = aa$$

quæ si $\alpha$, $\delta$, $\zeta$, fuerint quantitates affirmativæ, semper est pro Superficie clausa, nisi unus duove coëfficientes evanescant.

111. Perspectis his quatuor conditionibus, quibus Superficies

APPEND. in ſpatium finitum redigitur ; ſi proponatur æquatio ſecundi ordinis quæcunque determinata , ſtatim dijudicari poterit utrum Superficies ea æquatione expreſſa habeat partes in infinitum extenſas , an nullas. Quod ſi enim unica illarum quatuor conditionum deſit , Superficies certo in infinitum extenditur. Hoc autem caſu nonnullæ ſubdiviſiones ſunt faciendæ , quibus ſingularis varietas partibus in infinitum extenſis inducitur. Prima ſubdiviſio ergo conſtituatur , ſi fuerit

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 \text{ major quam } \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

quo caſu Superficies in infinitum extendetur , atque Superficiem conicam pro Aſymtota habebit , uti jam ante oſtendimus. Hicque caſus e Diametro eſt oppoſitus præcedenti , quo tota Superficies in ſpatio finito continetur.

112. Præterea autem dantur caſus quidam intermedii , quibus , etſi Superficies in infinitum abit , ſimili tamen modo inter duos præcedentes locum tenet quo Parabola inter Ellipſin & Hyperbolam continetur. Caſus iſte oritur ſi fuerit

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta,$$

eritque propterea

$$\alpha z = -\beta y - \gamma x + y\sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\delta)} + x\sqrt{(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}.$$

Habebit ergo æquatio Aſymtotica

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0;$$

duos Factores ſimplices , qui erunt vel reales , vel imaginarii , vel inter ſe æquales. Triplex iſta diverſitas ergo tria genera Superficierum in infinitum extenſarum præbet , ſicque omnino quinque genera Superficierum ſecundi ordinis ſumus adepti , quæ nunc diligentius proſequemur.

113. Quia , mutando poſitionem ternorum Axium , quibus Coordinatæ ſunt parallelæ , æquatio generalis ad formam ſim-

pliciorem reduci poteſt, iſta reductione ita utamur, ut æquationem generalem pro Superficiebus ſecundi ordinis ad formam ſimpliciſſimam redigamus, quæ tamen omnes ſpecies æque ac generalis in ſe complectatur. Cum igitur æquatio generalis pro Superficiebus ſecundi ordinis ſit CAP. V.

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0;$$

quæramus æquationem inter alias ternas Coordinatas $p$, $q$ & $r$, quæ quidem ſe mutuo in eodem puncto, quo ternæ priores decuſſent. Ad hoc ex §. 92. ſtatuatur

$$x = p(\cos. k. \cos. m - \sin. k. \sin. m. \cos. n) + q(\cos. k. \sin. m + \sin. k. \cos. m. \cos. n) - r. \sin. k. \sin. n$$

&

$$y = -p(\sin. k. \cos. m + \cos. k. \sin. m. \cos. n) - q(\sin. k. \sin. m - \cos. k. \cos. m. \cos. n) - r. \cos. k. \sin. n$$

atque

$$z = -p. \sin. m. \sin. n + q. \cos. m. \sin. n + r. \cos. n,$$

unde reſultet iſta æquatio

$$App + Bqq + Crr + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

114. Jam anguli illi arbitrarii $k$, $m$, & $n$ ita definiri poterunt, ut tres coëfficientes $D$, $E$, & $F$ evaneſcant. Quanquam enim calculus nimis ſit prolixus, quam ut angulorum illorum determinatio actu oſtendi poſſit; tamen ſi quis forte dubitet, an ſemper iſta eliminatio ad valores reales angulorum illorum perducat, is certe concedere debebit, duos ſaltem coëfficientes $D$ & $E$ nihilo æquales reddi poſſe. Hoc autem ſi fuerit effectum, poſitio tertii Axis, cui Ordinatæ $r$ ſunt parallelæ in plano ad Ordinatas $p$ normali, facile ita mutari poteſt, ut etiam coëfficiens $F$ evaneſcat. Statuatur enim $q = t. \sin. i + u. \cos. i$ & $r = t. \cos. i - u. \sin. i$, ita ut, loco termini $qr$, novus terminus $tu$ ingrediatur, cujus coëfficiens ope au-

APPEND. guli $i$ nihilo æqualis fieri poterit. Hoc igitur modo æquatio generalis pro Superficiebus secundi ordinis ad hanc formam perducetur

$$App + Bqq + Crr + Gp + Hq + Ir + K = 0.$$

115. Nunc præterea Coordinatæ $p$, $q$, $r$ datis quantitatibus ita augeri diminuive poterunt, ut coëfficientes $G$, $H$ & $I$ evanescant; quod fiet mutato tantum puncto illo, unde omnes Coordinatæ initium habent. Atque hoc modo omnes Superficies secundi ordinis in hac æquatione continebuntur

$$App + Bqq + Crr + K = 0,$$

ex qua intelligitur unumquodque trium planorum principalium per initium Coordinatarum ductorum Superficiem in duas partes similes & æquales bisecare. Omnis ergo Superficies secundi ordinis non solum unum habet planum diametrale, sed adeo tria, quæ se mutuo in eodem puncto normaliter intersecent; quod punctum propterea Centrum Superficiei constituet, etiamsi in nonnullis casibus hoc Centrum in infinitum distet. Simili scilicet modo, quo omnes Sectiones conicæ Centro dicuntur præditæ, etiamsi in Parabola Centrum a Vertice infinite removeatur.

116. Perducta ergo æquatione, qua omnes Superficies secundi ordinis continentur, ad formam simplicissimam, primum harum Superficierum genus exhibebit ista æquatio

$$Apq + Bqq + Crr = aa,$$

si quidem omnes tres coëfficientes A, B, & C valores obtineant affirmativos. Superficies igitur ad hoc primum genus pertinentes non solum totæ in finito spatio includentur, sed omnes quoque Centrum habebunt, in quo tria plana diametralia se mutuo ad angulos rectos decussant. Sit $C$ Centrum hujus figuræ, & $CA$, $CB$, $CD$ Axes illi principales inter se nor-

TAB. XXXVIII Fig. 143.

males, quibus Coordinatæ $p$, $q$, $r$ ſunt parallelæ erunt tria plana diametralia $ABab$; $ADa$; & $BDb$, quibus hoc Corpus in binas portiones ſimiles æquales ſecabitur. CAP. V.

117. Ponatur $r = o$; & æquatio $App + Bqq = aa$ exprimet naturam ſectionis principalis $ABab$; quæ idcirco erit Ellipſis Centrum habens in $C$, cujus ſemiaxes erunt $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$; & $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$. Si ponatur $q = o$, æquatio $App + Crr = aa$, erit pro ſectione principali $ADa$, quæ pariter erit Ellipſis Centrum habens in $C$, cujus ſemiaxes erunt $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$, & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$. Poſito autem $p = o$, prodibit pro tertia ſectione principali $BDb$ æquatio $Bqq + Crr = aa$, quæ etiam erit Ellipſis Centrum habens in $C$ & ſemiaxes $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$, & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$. Cognitis autem his tribus ſectionibus principalibus, ſeu tantum earum ſemiaxibus $CA = \frac{a}{\sqrt{A}}$; $CB = \frac{a}{\sqrt{B}}$ & $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$, natura hujus Corporis determinatur & cognoſcitur. Hinc primum iſtud Superficierum ſecundi ordinis genus *Elliptoides* appellari conveniet, quia tres ejus ſectiones principales ſunt Ellipſes.

118. Sub hoc genere continentur tres ſpecies præ primis notatu dignæ. Prima eſt, ſi omnes tres Axes principales $CA$, $CB$, & $CD$ inter ſe fuerint æquales, quo caſu tres ſectiones principales abibunt in Circulos, ipſumque Corpus in Globum, cujus æquatio, uti ſupra vidimus, erit

$$pp + qq + rr = aa.$$

Secunda ſpecies eos complectitur caſus, quibus duo tantum Axes principales ſunt inter ſe æquales. Sit nimirum $CD = CB$, ſeu $C = B$, atque ſectio $BDb$ fiet Circulus, ex æquatione autem $App + B(qq + rr) = aa$ intelligitur omnes ſectiones huic parallelas pariter fore Circulos; unde hoc Corpus erit Sphæroides ſive oblongum, ſi $AC$ major ſit quam

APPEND. $BC$; sive compressum si $AC$ sit minor quam $BC$. Tertia denique species ea complectitur Corpora, in quibus coëfficientes A, B, C sunt inæquales, quæ ideo nomen generale *Ellipsoides* retinebunt.

119. Sequentia genera Superficierum secundi ordinis hac continebuntur æquatione

$$App + Bqq + Crr = aa,$$

Ac primo quidem si nullus coëfficientium A, B, C prorsus desit; eorum autem, vel unus vel duo, valores habeant negativos. Sit unus tantum negativus, atque consideremus hanc æquationem

$$App + Bqq - Crr = aa,$$

TAB. XXXVIII. Fig. 144. in qua jam A, B, C numeros affirmativos denotare ponimus. Quod ad Centrum hujus Corporis & plana diametralia attinet, omnia eodem modo sunt comparata, ut ante. Patet igitur hujus Corporis sectionem principalem primam $ABab$ esse Ellipsin, cujus semiaxis $AC = \frac{a}{\sqrt{A}}$, alterque $BC = \frac{a}{\sqrt{B}}$. Binæ reliquæ sectiones principales $Aq$, $BS$ erunt Hyperbolæ Centrum in $C$ & semiaxem conjugatum $= \frac{a}{\sqrt{C}}$ habentes.

120. Repræsentabit ergo hæc Superficies speciem infundibuli, sursum & deorsum secundum Hyperbolas divergens. Unde ista Superficies Asymtoton habebit Conum æquatione $App + Bqq - Crr = 0$ expressum, Verticem in Centro $C$ habentem, & cujus latera sunt Asymtota Hyperbolarum. Stabit autem iste Conus Asymtotos intra Superficiem, eritque Conus rectus si fuerit $A = B$; scalenus vero si A non ipsi B æquabitur. Axis autem Coni erit recta $CD$ normalis ad

planum $ABa$. Ceterum omnes sectiones Axi $CD$ normales erunt Ellipses similes Ellipsi $ABab$, sectiones vero plano $ABab$ normales omnes erunt Hyperbolæ: unde istas Superficies *elliptico-hyperbolicas* vocari conveniet, Asymtoto suo conico circumscriptas. Hujus igitur Superficies nobis constituent genus secundum. CAP. V.

121. Species in hoc genere iterum tres notari poterunt: quorum prima erit, si $a = 0$, quo casu Ellipsis $ABab$ in punctum evanescit, & Hyperbolæ in lineas rectas abibunt: Superficies vero ipsa cum Asymtota sua penitus confundetur, ex quo hæc prima species complectetur omnes Conos, sive rectos sive scalenos; unde nova subdivisio fieri posset. Altera species erit si fiat $A = B$; quo casu Ellipsis $ABab$ in Circulum mutatur, & ipsa Superficies fiet rotunda seu tornata. Orietur scilicet hæc Superficies, si Hyperbola quæcunque circa Axem conjugatum convertatur. Tertia species ab ipso genere non discrepabit.

122. Tertium genus definiamus, si duo coëfficientes terminorum $pp$, $qq$, & $rr$ fiant negativi, cujus ergo æquatio sit

$$App - Bqq - Crr = aa.$$

Posito ergo $r = 0$, erit prima sectio principalis Hyperbola $EAFeaf$ Centrum habens in $C$, cujus semiaxis transversus erit $= \frac{a}{\sqrt{A}}$, & semiaxis conjugatus $= \frac{a}{\sqrt{B}}$. Altera sectio principalis, posito $q = 0$, pariter erit Hyperbola $AQ$, $aq$, eodem semiaxe transverso prædita, sed cujus Axis semiconjugatus erit $= \frac{a}{\sqrt{C}}$: tertia sectio principalis fit imaginaria. Tota denique hæc Superficies intra Superficiem conicam Asymtotam erit sita: unde hoc genus vocari potest *hyperbolico-hyperbolicum* Cono Asymtoto inscriptum. Si fiat $B = C$, Superficies erit rotunda, orta ex conversione Hyperbolæ circa suum Axem ransversum, quo casu species peculiaris constitui posset. Sin TAB. XXXIX. *Fig.* 145.

APPEND. autem ponatur $a = o$, oritur Superficies conica, quam jam, tanquam speciem generis præcedentis, sumus contemplati.

123. Ad sequentia genera cognoscenda ponamus unum coëfficientium A, B, C evanescere. Sit igitur $C = o$, atque æquatio generalis §. 114. inventa erit

$$App + Bqq + Gp + Hq + Ir + K = o,$$

in qua, augendo seu diminuendo Ordinatas $p$ & $q$, termini $Gp$ & $Hq$, non vero $Ir$ tolli poterit. Relinquetur ergo terminus $Ir$ in æquatione: ejus vero ope tolli poterit terminus ultimus K, unde ejusmodi æquationem habebimus

$$App + Bqq = ar,$$

cujus duo casus sunt perpendendi. Prior si uterque coëfficiens A & B fuerit affirmativus: posterior si alter sit negativus. Utroque autem casu Centrum Superficiei in Axe $CD$ erit situm sed ad distantiam infinitam remotum.

124. Sint primo ambo coëfficientes A & B affirmativi: quo casu constituatur genus quartum, æquatione hac contentum

$$App + Bqq = ar.$$

TAB. XXXIX. *Fig.* 146. Prima ergo sectio principalis oriunda si ponatur $r = o$, in punctum evanescet; altera posito $q = o$; & tertia posito $p = o$, utraque erit Parabola. Nempe $MAm$ & $NAn$. Cum igitur hujus Superficiei omnes sectiones ad Axem $AD$ normales sint Ellipses; sectiones vero per hunc ipsum Axem factæ Parabolæ, hujus generis Corpora *elliptico-parabolica* appellabimus. Cujus species sunt notandæ duæ: altera si $A = B$, quo casu oritur Corpus rotundum, *conoides parabolicum* vocatum: altera vero si $a = o$, sitque $App + Bqq = bb$, quæ dat Cylindros, tam rectos si $A = B$, quam scalenos si A & B fuerint inæquales.

125. Quintum

125. Quintum genus continebitur hac æquatione

$$App - Bqq = ar,$$

cujus ſectio principalis prima, facto $r = 0$, erunt duæ lineæ rectæ $Ee$, $Ff$, ſe mutuo in puncto $A$ decuſſantes. Omnes vero ſectiones huic parallelæ erunt Hyperbolæ ſua centra in Axe $AD$ habentes, & intra Aſymtotas rectas $Ee$ & $Ff$ conſtitutæ. Duo igitur plana, quæ plano $ABC$ in Lineis $Ee$ & $Ff$ normaliter inſiſtunt, in infinitum cum Superficie propoſita congruent, ideoque hæc Superficies pro Aſymtoto habebit duo plana ſe mutuo decuſſantia, ſectiones reliquæ principales in planis $ACD$ & $ABd$ factæ erunt Parabolæ: unde Superficies ad hoc genus pertinentes vocabimus *parabolico-hyperbolicas* duo plana pro Aſymtotis habentes: cujus ſpecies, (ſi $a = 0$, ut ſit $App - Bqq = bb$,) erit Cylindrus hyperbolicus, cujus omnes ſectiones ad Axem $AD$ normales erunt Hyperbolæ inter ſe æquales: ſi inſuper ſit $b = 0$, oriuntur duo illa ipſa plana aſymtotica. TAB. XXXIX. Fig. 147.

126. Sextum denique genus Superficierum ſecundi ordinis complectetur hæc æquatio

$$App = aq,$$

quæ præbet Cylindrum Parabolicum, cujus omnes ſectiones Axi $AD$ normales erunt Parabolæ ſimiles & æquales, ita ut ſingularum Vertices in rectam $AD$ incidant & Axes inter ſe ſint paralleli. Ad hæc igitur ſex genera omnes Superficies ſecundi ordinis reduci poterunt, ita ut nulla exhiberi poſſit, quæ non in uno horum generum contineatur. Ceterum, ſi in genere ultimo fiat $a = 0$, ut ſit $App = bb$, hæc æquatio præbebit duo plana inter ſe parallela, quæ quaſi ſpeciem hujus generis conſtituent. Similitudo ſcilicet hic, uti in Lineis ſecundi ordinis obtinet, ubi vidimus duas rectas ſe decuſſantes Hyperbolæ ſpeciem, duas autem Lineas parallelas Parabolæ ſpeciem conſtituere.

127. Quanquam hæc ſex genera ex æquatione ſimpliciſſima, ad quam Superficies ſecundi ordinis reducere licet, formavimus; tamen nunc facile erit, ſi æquatio quæcunque ſecundi gradus ſit propoſita, genus aſſignare ad quod Superficies pertineat. Quod ſi enim propoſita fuerit hæc æquatio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \kappa = 0,$$

judicium ex ſupremis terminis, in quibus duæ variabilium occurrunt dimenſiones, petendum erit; ſpectari ſcilicet debebunt hi termini

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx,$$

in quibus ſi fuerit

$4\alpha\zeta$ major quam $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ major quam $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ major quam $\epsilon\epsilon$
&
$\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta$ minor quam $\beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$,

Superficies erit clauſa & ad genus primum, quod Ellipsoides vocavimus, pertinebit.

128. Si una pluresve harum conditionum deſint; neque tamen ſit $\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$, Superficies vel ad ſecundum vel ad tertium genus pertinebit, eritque corpus hyperbolicum Cono Aſymtoto præditum, eique vel circumſcriptum in genere ſecundo, vel inſcriptum in genere tertio. At, ſi fuerit $\alpha\epsilon\epsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\epsilon + 4\alpha\delta\zeta$, quo caſu expreſſio

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \epsilon xy + \zeta xx,$$

reſolvi poterit in duos Factores ſimplices, ſive imaginarios ſive reales. Caſu priori Superficies pertinebit ad genus quartum, poſteriori vero ad quintum. Quod ſi denique iſta expreſſio duos habeat Factores æquales, ſeu ſit quadratum, tum orietur genus ſextum. Sicque ſtatim facile dijudicari poterit, ad quodnam genus quævis æquatio propoſita pertineat; diffi-

cilius tantum erit judicium circa genus secundum & tertium: quæ ambo ideo in unum conflari possent. CAP. V.

129. Simili modo Superficies tertii & sequentium ordinum pertractari atque in genera dividi poterunt. Spectari scilicet tantum debebunt æquationis generalis termini supremi, & consequenter, pro Superficiebus tertii ordinis, ii in quibus Coordinatæ tres obtinent dimensiones, qui erunt

$$\alpha z^3 + \beta yzz + \gamma y^2 z + \delta x^2 z + \epsilon xzz + \zeta xyz + \&c..$$

Primum igitur dispiciendum est, utrum hi termini conjunctim sumti, seu æquationis membrum supremum, resolvi possit in Factores simplices an non. Si resolutionem in Factores respuat, habebit Superficies Conum tertii ordinis pro Asymtoto. Quia autem natura hujus Coni exprimitur supremo membro nihilo æquali posito, plures hujusmodi Coni tertii ordinis dabuntur, ex quorum diversitate hinc plura Superficierum genera constituentur. Quamvis enim Coni secundi ordinis omnes ad unum genus referuntur, quia sunt vel recti vel scaleni; tamen in tertio ordine multo major varietas locum invenit.

130. Expositis ergo his generibus, considerandi sunt casus, quibus supremum membrum in Factores simplices resolvi potest, sive sint reales sive imaginarii. Habeat primum unum Factorem simplicem, qui erit realis: ex eo Superficies habebit Asymtotam planam. Alter Factor nihilo æqualis positus vel dabit æquationem possibilem vel non: si æquatio fuerit possibilis, nisi omnes Coordinatæ evanescant, unica erit Asymtota plana: sin autem sit impossibilis, Superficies duas habebit Asymtotas, alteram planam, alteram Conum secundi ordinis. Quod si habeat tres Factores simplices, quia unus semper est realis, si bini reliqui sint vel imaginarii, vel reales, duo nova genera oriuntur. Denique si omnes tres Factores simplices sint reales, prout duo vel omnes sint inter se æquales, adhuc duo genera constitui poterunt. Nulla autem in hoc ordine datur Superficies, quæ non in infinitum extendatur.

## CAPUT VI.

### *De interſectione duarum Superficierum.*

131. Supra jam expoſita eſt methodus inveſtigandi naturam ſectionis, quæ oritur ſi Superficies quæcunque a plano ſecatur. Cum enim Linea curva, quam ſectio format, tota poſita ſit in eodem plano, quo ſectio eſt facta, binas Coordinatas, quarum relatione natura hujuſmodi Linearum curvarum exprimi ſolet, in eodem plano aſſumſimus, ut hoc pacto cognitio ad receptam rationem reduceretur. At, ſi Superficies ſecans non fuerit plana, quoniam tum ſectio non in eodem plano jacebit, ejus natura duabus Coordinatis comprehendi nequit: quapropter alio modo erit utendum, ad hujuſmodi ſectiones æquationibus includendas, quibus cujuſque puncti poſitio vera indicetur.

132. Punctorum autem non in eodem plano ſitorum loca definiri poſſunt, ſi tria plana inter ſe normalia in ſubſidium adhibeantur, atque pro quovis puncto ternæ illæ diſtantiæ aſſignentur, quibus id a quolibet plano diſtat. Hinc tres variabiles requirentur ad naturam Lineæ curvæ non in eodem plano conſtitutæ exprimendam; ita ut, ſi una pro libitu definiatur, ex ea binæ reliquæ valores determinatos obtineant. Una igitur æquatio inter tres illas Coordinatas non ſufficit ad hoc præſtandum; quippe, quæ indolem univerſæ Superficiei cujuſdam indicaret; quocirca duabus opus erit æquationibus, quarum ope, ſi uni variabili datus valor tribuatur, ſimul binarum reliquarum valores determinentur.

133. Natura igitur cujuſque Lineæ curvæ, quam in eodem plano conſtitutam eſſe non conſtat, commodiſſime exprimitur duabus æquationibus inter tres variabiles, puta $x$, $y$, $z$, quæ totidem Coordinatas inter ſe normales repræſentabunt. Ope duarum ergo hujuſmodi æquationum binæ variabiles ex tertia

determinari poterunt, æquabitur scilicet tam $y$ quam $z$ Functioni cuipiam ipsius $x$. Poterit etiam pro arbitrio una variabilium eliminari; unde tres æquationes duas tantum variabiles involventes formabuntur, una inter $x$ & $y$, altera inter $x$ & $z$, & tertia inter $y$ & $z$. Harum trium vero æquationum quævis per binas reliquas sponte determinatur, ita ut, si habeantur æquationes inter $x$ & $y$, & inter $x$ & $z$, ex his tertia jam per eliminationem ipsius $x$ inveniatur.

TAB. XL. Fig. 148.

134. Sit ergo proposita Linea quæcunque curva non in eodem plano posita, cujus unum quoddam punctum sit $M$. Sumantur pro arbitrio tres Axes invicem normales $AB$, $AC$, & $AD$, quibus tria plana invicem normalia $BAC$, $BAD$ & $CAD$ determinantur. Ex puncto Curvæ $M$ in planum $BAC$ demittatur perpendiculum $MQ$, & ex puncto $Q$ ad Axem $AD$ ducatur normalis $QP$, erunt $AP$, $PQ$ & $QM$ tres illæ Coordinatæ, inter quas si duæ dentur æquationes, natura Curvæ determinatur. Vocentur ergo $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$; & ex duabus æquationibus inter $x$, $y$ & $z$ propositis, eliminando $z$ formetur æquatio duas tantum variabiles $x$ & $y$ continens, quæ determinabit positionem puncti $Q$ in plano $BAC$; atque singula puncta $Q$ ex singulis $M$ orta præbebunt Lineam curvam $EQF$, cujus natura æquatione illa inter $x$ & $y$ inventa exprimetur.

135. Hoc igitur modo ex duabus æquationibus inter tres Coordinatas propositis facile cognoscitur natura Curvæ $EQF$, quæ formatur demittendis ex singulis Curvæ indagandæ punctis $M$ perpendiculis $MQ$ in planum $BAC$. Curva autem hæc $EQF$ vocatur *projectio* Curvæ $GMH$ in planum $BAC$. Quemadmodum autem projectio in plano $BAC$ facta invenitur eliminando variabilem $z$; ita ejusdem Curvæ projectio in plano $BAD$ vel in plano $CAD$ obtinebitur, si vel variabilis $y$ eliminetur vel $x$. Una autem projectio $EQF$ non sufficit ad Curvam $GMH$ cognoscendam, sin autem pro singulis punctis $Q$ cognita fuerint perpendicula $QM = z$, ex projectione $EQF$ ipsa Curva $GMH$ facile construetur.

 Ad hoc igitur opus est, ut præter æquationem inter $x$ & $y$, qua natura projectionis, exprimitur, habeatur æquatio inter $z$ & $x$, vel inter $z$ & $y$, vel etiam inter tres $z, x, y$, ex qua longitudo perpendiculi $QM = z$ pro quovis puncto $Q$ innotescat.

136. Cum autem æquatio inter $z$ & $x$ exprimat projectionem Curvæ $GMH$ in plano $BAD$ factam, æquatio autem inter $z$ & $y$ projectionem in plano $CAD$, atque æquatio inter tres variabiles $z$, $y$ & $x$ exhibeat Superficiem, in qua curva $GMH$ versetur: manifestum est primum ex duabus projectionibus ejusdem Curvæ $GMH$ in duobus planis factis ipsam Curvam $GMH$ cognosci. Tum vero perspicuum est, si detur Superficies, in qua Linea Curva $GMH$ contineatur, atque præterea ejus projectio in quodam plano, pariter Curvam illam fore cognitam. Erigantur enim ex singulis projectionis punctis rectæ normales $QM$, quarum intersectio cum Superficie definiet Curvam $GMH$ quæsitam.

137. His præmissis, quæ ad indolem cujusque Curvæ non in eodem plano constitutæ cognoscendam pertinent, non difficile erit intersectionem duarum quarumvis Superficierum definire. Quemadmodum enim intersectio duorum planorum est Linea recta, ita intersectio duarum Superficierum quarumvis erit Linea, sive recta sive curva; hæcque vel in eodem plano posita vel secus. Utcunque autem fuerit comparata, singula ejus puncta ad utramque Superficiem pertinebunt, ideoque in æquatione utriusque Superficiei continebuntur. Quòd si ergo ambæ Superficies exprimantur æquationibus inter ternas Coordinatas, quæ ad eadem tria plana principalia inter se normalia seu ad eosdem tres Axes inter se normales $AB$, $AC$ & $AD$ referantur, tum ambæ istæ æquationes conjunctæ naturam intersectionis exprimens.

138. Propositis ergo duabus Superficiebus se mutuo secantibus, utriusque natura exprimi debet æquatione inter tres Coordinatas, quæ ad eosdem Axes principales referantur: sicque habebuntur duæ æquationes inter tres Coordinatas $x$,

$y$ & $z$, ex quibus si una eliminetur, æquatio inter binas reliquas præbebit projectionem intersectionis in plano, quod his duabus Coordinatis constituitur, factæ. Hoc igitur modo quoque intersectio cujusque Superficiei a plano factæ investigari poterit: cum enim æquatio generalis pro plano sit $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, si in æquatione Superficiei loco $z$ substituatur ejus valor ex illa æquatione oriundus, nempe $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, prodibit æquatio pro projectione intersectionis in plano Coordinatarum $x$ & $y$ facta. Simul vero æquatio $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ pro quovis puncto $Q$ projectionis præbebit quantitatem perpendiculi $QM$ ad ipsam intersectionem pertingentis.

139. Quod si eveniat ut æquatio pro projectione fiat impossibilis, uti si inveniretur $xx + yy + aa = 0$; tum hoc erit indicium, ambas Superficies se mutuo nusquam intersecare. Sin autem æquatio projectionis in unicum punctum deducat, seu, si projectio in punctum evanescat, tum ipsa quoque intersectio erit punctum, ideoque ambæ Superficies se mutuo in puncto contingent; qui contactus itaque ex æquatione cognosci poterit. Datur autem præterea contactus linearis, quando duæ Superficies se in infinitis punctis contingunt; Lineaque contactus vel erit recta vel curva. Recta scilicet erit, si planum tangat Cylindrum vel Conum: Conus rectus autem a Globo intus tangetur per Peripheriam Circuli. Qui contactus ex æquatione cognoscentur, si pro projectione ejusmodi prodierit æquatio, quæ duas habeat radices æquales, propterea quod contactus nil aliud est, nisi concursus duarum intersectionum.

140. Ad hæc clarius explicanda ponamus Globum secari a plano quocunque. Sumamus æquationem ad Centrum Globi accommodatam $zz + yy + xx = aa$, pro plano autem utcunque posito hæc habebitur æquatio

$$\alpha z + \beta y + \gamma x = f,$$

APPEND. unde, cum sit $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$, sequens orietur æquatio inter $x$ & $y$ pro projectione

$$o = ff - \alpha^2 a - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta^2) y^2 + 2\beta\gamma x y + (\alpha^2 + \gamma^2) xx,$$

quam patet esse Ellipsin, si quidem æquatio fuerit realis; sin autem fuerit imaginaria Globus a plano nusquam tangetur: at, si Ellipsis in punctum evanescat, planum & Globus se mutuo tangent. Qui casus ut eruatur, quæratur

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha\sqrt{(a^2(\alpha^2 + \beta^2) - f^2 + 2\gamma f x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) xx)}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

ubi si $f$ ejusmodi habuerit valorem, ut quantitas radicalis nunquam fieri possit realis, nullus dabitur contactus, neque interfectio.

141. Ponamus esse $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$ eritque

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha x \sqrt{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \mp \alpha\gamma a \sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

cui æquationi realiter satisfieri nequit, nisi sit

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, \ \& \ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}.$$

Quare, si fuerit $fa = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, planum, quod exprimitur æquatione $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$, Globum tanget; punctumque contactus habebitur, si capiatur

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}};\ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}, \ \& \ z = \frac{\alpha a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

quorum valorum veritas per Geometriam elementarem, ubi contactus Sphæræ a plano docetur, comprobari potest.

142. Hinc igitur generalis regula deducitur, cujus ope cognosci potest, utrum Superficies quæcunque a plano aliave superficie

Superficie tangatur an non? Eliminata enim ex ambabus æquationibus una variabili, videndum est an æquatio resultans resolvi possit in Factores simplices an minus. Si enim habeat duos Factores simplices imaginarios, dabitur contactus in puncto, quod innotescet ponendo utrumque Factorem $= 0$. Sin autem habeat duos Factores simplices reales eosque inter se æquales, Superficies se mutuo secundum Lineam rectam tangent. Quod si vero illa æquatio habeat duos Factores non simplices æquales; seu, si fuerit per quadratum divisibilis, tum ejus radix nihilo æqualis posita exhibebit projectionem illius Lineæ, quæ ex contactu oritur. Hinc quoque patet si eadem illa æquatio quatuor habuerit Factores imaginarios, tum Superficies se mutuo in duobus punctis contingere. CAP. VI.

143. Quo hæc plenius explicentur, investigemus contactum Coni & Globi cujus Centrum in Axe Coni sit positum. Æquatio pro Globo est $zz + yy + xx = aa$, pro Cono autem, $(f - z)^2 = mxx + nyy$, posito quod Vertex Coni intervallo $f$ a Centro Globi sit remotus. Eliminemus hinc variabilem $y$, eritque

$$(f - z)^2 = naa - nzz + (m - n)xx,$$

pro projectione intersectionis in plano Coordinatarum $x$ & $z$. Sit primum Conus rectus, seu $m = n$, eritque

$$z = \frac{f \pm \sqrt{(n(1+n)aa - nff)}}{1+n}.$$

Quare, si fuerit $f = a\sqrt{(1+n)}$, erit dupliciter $z = \frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$, ideoque contactus erit linearis; scilicet per Circulum, cujus projectio in plano per Axem transeunte est Linea recta ad Axem normalis.

144. Pro Cono autem scaleno, ubi $m$, & $n$ sunt inæquales, æquatio inventa videtur semper dare intersectionem, cum

APPEND. tamen sæpius nulla existat. Semper enim, si quidem $m$ superet $n$, prodibit æquatio realis pro projectione intersectionis: at vero notandum est realitatem projectionis non semper indicare intersectionem realem. Ut enim ipsa intersectio sit realis non sufficit projectionem esse realem, sed insuper perpendicula a projectione ad intersectionem ducta realia esse oportet. Quamvis igitur omnis Curva realis habeat quasvis projectiones reales; tamen non vicissim ex realitate projectionis realitas ipsius Curvæ, quæ quæritur, concludi potest. Hæcque cautela perpetuo probe est adhibenda, ne realitate æquationum, quas pro projectionibus invenimus, abutamur.

145. Hoc incommodum evitabimus, si projectionem in plano Ordinatarum $x$ & $y$ quæramus: quia enim in hoc plano nullum datur punctum, cui non punctum in conica Superficie respondeat, si projectio in hoc plano fuerit realis, ipsa quoque intersectio erit realis. Cum igitur sit $z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$, fiet ex altera æquatione

$$f - \sqrt{(aa - xx - yy)} = \sqrt{(mxx + nyy)}$$

seu

$$aa + ff - (1+m)xx - (1+n)yy = 2f\sqrt{(aa - xx - yy)}$$

porroque

$$\left.\begin{matrix} (aa-ff)^2 \begin{matrix} -2(aa-ff) \\ -2(aa+ff)m \end{matrix}\Big\} x^2 \begin{matrix} -2(aa-ff) \\ -2(aa+ff)n \end{matrix}\Big\} y^2 + \\ (1+m)^2 x^4 + 2(1+m)(1+n)x^2y^2 + (1+n)^2 y^4 \end{matrix}\right\} = 0$$

unde fit

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{aa - ff + n(aa+ff) - (1+m)(1+n)xx \pm}{(1+n)^2} \\ \dfrac{2f}{(1+n)}\sqrt{(n(1+n)aa - nff + (m-n)(1+n)xx)} \end{matrix}\right\} = y^2.$$

&

$$\left.\begin{array}{l}\frac{aa - ff + m(aa+ff) - (1+m)(1+n)yy \pm}{(1+m)^2} \\ \frac{2f}{(1+m)^2}\sqrt{(m(1+m)aa - mff + (n-m)(1+m)yy)}\end{array}\right\} = x^2.$$

146. Ut igitur æquatio inventa habeat Factores, oportet esse vel $ff = (1+n)aa$ vel $ff = (1+m)aa$. Priori casu fit

$$yy = \frac{naa - (1+m)xx}{1+n} \pm \frac{2fx\sqrt{(m-n)}}{(1+n)\sqrt{(1+n)}},$$

unde, si sit $m$ minor quam $n$, necesse est ut sit $x = 0$ & $y = \pm a\sqrt{\frac{n}{1+n}}$, & $z = \frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$. Dantur ergo duo puncta contactus ab Axe Coni utrinque æqualiter distantia. Sin autem fuerit $m$ major quam $n$, sumi debet altera æquatio

$$xx = \frac{maa - (1+n)yy}{1+m} \pm \frac{2fy\sqrt{(n-m)}}{(1+m)\sqrt{(1+m)}},$$

quæ realis esse nequit, nisi sit $y = 0$; quo casu fit $x = \pm a\sqrt{\frac{m}{1+m}}$; & $z = \frac{a}{\sqrt{(1+m)}}$. Hocque ergo casu dabuntur duo alia contactus puncta; contactus enim existet in ea Coni parte, ubi est arctissimus. Simili itaque modo in singulis casibus contactus judicari debebit.

147. Modus autem longe facilior determinandi plana tangentia quarumcunque Superficierum deduci potest ex methodo inveniendi tangentes Linearum curvarum supra tradita. Sit natura Superficiei, cujus plana tangentia quærimus, expressa æquatione inter tres Coordinatas $AP = x$, $PQ = y$, & $QM = z$, ex qua definiri oportet positionem plani Superficiem in puncto $M$ tangentis. Primum igitur consideramus si Superficies secetur plano quocunque per punctum $M$ transeunte, sectionis inde ortæ tangentem in puncto $M$ sitam fore in plano tangente. Quare, si duarum hujusmodi sectionum tangentes TAB. XL. *Fig.* 149.

APPEND. in puncto $M$ invenerimus, planum quod his duabus rectis tangentibus definitur, ipsam Superficiem in puncto $M$ contingere debere.

148. Secetur ergo primum Superficies plano ad planum $APQ$ normalis, secundum rectam $QS$ parallelam Axi $AP$. Tum simili modo fiat sectio per punctum $M$ pariter normalis ad planum $APQ$, sed secundum rectam $QP$ Axi $AP$ normalem; seu, prior sectio sit normalis ad Axem $AB$, posterior vero ad Axem $AP$. Sit Curva $EM$ prior sectio, cujus quæratur tangens $MS$ rectæ $QS$ in puncto $S$ occurrens, ita ut sit $QS$ subtangens. Sectio posterior sit Linea curva $FM$, cujus tangens sit recta $MT$ & subtangens $QT$. Quibus inventis planum $SMT$ Superficiem in puncto $M$ tanget. Ducta ergo $ST$ dabit intersectionem plani tangentis cum plano $APQ$; atque, si ex $Q$ ad $ST$ normalis ducatur $QR$, tum erit $QR$ ad $QS$ uti sinus totus ad tangentem anguli $MRQ$, quo planum tangens ad planum $APQ$ inclinatur.

149. Ponamus per methodum Tangentium supra traditam inventas esse subtangentes $QS = s$ & $QT = t$; erit $PT = t - y$, & $PX = s - \frac{sy}{t}$; unde fit $AX = x + \frac{sy}{t} - s$. Innotescit ergo hinc punctum $X$, in quo recta $ST$ Axem $AP$ trajicit: &, quia angulus $AXS = TSQ$, erit hujus anguli tangens $= \frac{t}{s}$, ex quo positio intersectionis plani tangentis cum plano $APQ$ cognoscitur. Deinde, ob $ST = \sqrt{(ss + tt)}$, erit $QR = \frac{st}{\sqrt{(ss + tt)}}$, per quam si dividatur $QM$ prodibit tangens anguli inclinationis $MRQ = \frac{z\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Si porro ad $MR$ normalis ducatur $MN$, erit hæc cum ad planum tangens, tum ad ipsam Superficiem in puncto $M$ normalis. Ejus ergo positio colligitur ex $QN = \frac{zz\sqrt{(ss+tt)}}{st}$. Demittatur ex $N$ ad Axem $AP$ perpen-

dicularis $NV$, ob angulum $QNV = QST$, erit $PV = \frac{ss}{t} = QW$ & $NW = \frac{ss}{t}$. Quare, ſi hoc modo definiatur poſitio puncti $N$ in plano $APQ$, recta $NM$ erit normalis in Superficiem. 

150. Quemadmodum interſectio duarum Superficierum per projectiones indagari debet, ſupra jam eſt oſtenſum. Inquiramus autem cujus ordinis futura ſit projectio, pro ordine, ad quem Superficies referuntur. Ac primo quidem duæ Superficies primi ordinis, ſeu planæ, pro interſectione ejuſque projectione dant Lineam primi ordinis. Deinde quoque vidimus hanc projectionem ultra ſecundum ordinem aſſurgere non poſſe, ſi altera Superficies fuerit primi ordinis altera ſecundi. Simili modo manifeſtum eſt, ſi altera Superficies fuerit tertii ordinis altera primi, projectionem tertium gradum non eſſe tranſgreſſuram & ita porro. Sin autem duæ Lineæ ſecundi ordinis ſe mutuo ſecent, projectio interſectionis erit vel quarti ordinis vel inferioris; atque generaliter ſi altera Superficies ſit ordinis $m$, altera ordinis $n$, interſectionis projectio ad altiorem ordinem, quam qui numero $mn$ indicatur, nunquam referetur.

151. Quando neutra Superficierum ſe mutuo ſecantium eſt plana, plerumque ſectio earum mutua eſt Linea curva non in eodem plano conſtituta. Hoc tamen non obſtante fieri poteſt, ut tota ſectio in eodem plano ſit poſita; id quod eveniet ſi ambæ Superficierum æquationes junctim ſumtæ hujuſmodi æquationem $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ in ſe complectantur. Quod utrum eveniat, ex duabus æquationibus propoſitis definiantur binæ variabiles $z$ & $y$ per tertiam $x$, fiatque $z = P$ & $y = Q$, exiſtentibus P & Q Functionibus ipſius $x$. Tum diſpiciatur, an ejuſmodi numerus $n$ detur, ut in $P + nQ$ omnes poteſtates ipſius $x$ ſe mutuo tollant, præter infimam $x$ & terminos conſtantes. Quod ſi eveniat, fueritque $P + nQ = mx + k$, ſectio erit in eodem plano, hocque planum indicabitur æquatione $z + ny = mx + k$.

APPEND. 152. Sint, verbi gratia, propositæ sequentes duæ Superficies secundi ordinis altera pro Cono recto $zz = xx + yy$, altera pro Superficie secundi generis elliptico-hyperbolica $zz = xx + 2yy - 2ax - aa$. Ex quibus cum sit $xx + 2yy - 2ax - aa = xx + yy$, erit $y = \sqrt{(2ax + aa)}$ & $z = x + a$, quæ ultima æquatio jam indicat totam sectionem in eodem plano esse sitam, cujus positio determinetur æquatione $z = x + a$. Hac igitur ratione plurimæ quæstiones ad naturam Superficierum pertinentes resolvi poterunt. Quæ autem methodum hic expositam transgrediuntur, eæ Analysin infinitorum requirunt, ad quam scientiam hæc, quæ his libris tradita sunt, viam præparant.

*FINIS.*









